

25to.

$$\textcircled{1} \cdot \|f\|_\alpha = 0 \Leftrightarrow f = 0:$$

$$(\Leftarrow) \|f\|_\alpha = 0 \text{ y } \|f\|_\alpha = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} = 0$$

$$(\Rightarrow) \|f\|_\alpha = 0 \rightarrow \|f\|_\infty = 0$$

$$\therefore \|f\|_\alpha = 0$$

$$\therefore f \equiv 0$$

• Desig. triangular: Sean $f, g, h \in C^\alpha([0,1])$

$$\|f - g\|_\infty \leq \|f - h\|_\infty + \|h - g\|_\infty$$

$$\|f - g\|_\alpha = \sup_{0 \leq x \neq y \leq 1} \frac{|f(x) - g(x) - (f(y) - g(y))|}{|x - y|^\alpha}$$

$$= \sup_{0 \leq x \neq y \leq 1} \frac{|f(x) - h(x) - f(y) + h(y) + h(x) - g(x) - h(y) + g(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

$$\leq \sup_{\%} \frac{|f(x) - h(x) - (f(y) - h(y))|}{|x - y|^\alpha} + \frac{|h(x) - g(x) - (h(y) - g(y))|}{|x - y|^\alpha}$$

$$\leq \sup_{0 \leq x \neq y \leq 1} \frac{|f(x) - h(x) - (f(y) - h(y))|}{|x - y|^\alpha} + \sup_{0 \leq x \neq y \leq 1} \frac{|h(x) - g(x) - (h(y) - g(y))|}{|x - y|^\alpha}$$

$$= \|f - h\|_\alpha + \|h - g\|_\alpha$$

$$\therefore \|f - g\|_\alpha \leq \|f - h\|_\alpha + \|h - g\|_\alpha \quad (\text{Aunque es más fácil: } \|f + g\|_\alpha \leq \|f\|_\alpha + \|g\|_\alpha)$$

• $\|af\|_\alpha = |a| \|f\|_\alpha$:

$$\|af\|_\alpha = \sup_{0 \leq x \neq y \leq 1} \frac{|a(f(x) - f(y))|}{|x - y|^\alpha} + \|af\|_\infty = |a| \cdot \sup_{\%} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} + |a| \|f\|_\infty$$

$$= |a| (\|f\|_\alpha + \|f\|_\infty) = |a| \cdot \|f\|_\alpha$$

Con lo cual $\|\cdot\|_\alpha$ es una norma sobre $C^\alpha([0,1])$ a.s.p.

(OJO: Para usar la $\|\cdot\|_\infty$ debemos observar que $C^\alpha([0,1]) \subseteq C([0,1])$ con lo cual $\|\cdot\|_\infty$ está bien def. para $f \in C^\alpha([0,1])$ o.s.p.

• Compleitud:

Sea $(f_n)_n \subseteq C^\alpha([0,1])$ sucesión de Cauchy para $\|\cdot\|_\alpha$

$\Rightarrow (f_n)_n$ es de Cauchy para $\|\cdot\|_\infty$. Luego $f_n \rightarrow f$ para $\|\cdot\|_\infty$

En particular $f \in C([0,1])$

Como además la sucesión de num. reales $\|f_n\|_\alpha$ converge,

se tiene que $\exists M \in \mathbb{R}$ tal $\|f_n\|_\alpha \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Luego: $\frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq \|f_n\|_\alpha \leq M \quad (\forall n)(\forall x \neq y)$

Tomando $\lim_{n \rightarrow \infty}$: $\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq M \quad (\forall x \neq y)$

$$\therefore f \in C^\alpha([0,1])$$

Sea ahora $\epsilon > 0$ y sea $N_0 \in \mathbb{N}$ tal $\forall m, n \geq N_0 \quad \|f_m - f_n\|_\alpha < \epsilon$.
 $\therefore (\forall x \neq y) (\forall m, n \geq N_0) \quad \frac{|f_m(x) - f_m(y) - (f_n(y) - f_n(y))|}{|x - y|^\alpha} < \epsilon$

Tomando $m \rightarrow \infty$:
 $(\forall x \neq y) (\forall n \geq N_0) \quad \frac{|f_n(x) - f_n(y) - (f_n(y) - f_n(y))|}{|x - y|^\alpha} < \epsilon \quad / \sup_{0 \leq x \neq y \leq 1}$

$(\forall n \geq N_0) \quad \|f_n - f\|_\alpha < \epsilon \quad [i.e. (\forall \epsilon > 0) (\exists N_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq N_0) \|f_n - f\|_\alpha < \epsilon]$

Luego: $\|f_n - f\|_\alpha = \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|f_n - f\|_\alpha}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0 \quad \text{si } n \rightarrow \infty$ 1,0 pts

(ii) • $\overline{B_\alpha}$ es cerrado en $C([0,1])$:

Sea $(f_n)_n \subseteq \overline{B_\alpha}$ tal $f_n \rightarrow f$ en $\|\cdot\|_\infty$. (PD) $f \in C^\alpha([0,1])$

Probamos que $\|f\|_\alpha < +\infty$. Primero, notemos que

$$|f(x) - f(y)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_n(y)| = |x - y|^\alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{|x - y|^\alpha}}_{\leq \|f_n\|_\alpha}$$

$$\Rightarrow \|f\|_\alpha = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_\alpha$$

Pero como $(f_n)_n \subseteq \overline{B_\alpha}$: $\|f_n\|_\alpha \leq \|f_n\|_\alpha \leq 1$

$$\therefore \|f\|_\alpha \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_\alpha \leq 1 < +\infty \quad 0,7 \text{ pts.}$$

• $\overline{B_\alpha}$ es relativamente compacto en $C([0,1])$

Primero $\overline{B_\alpha} \subseteq \overline{B_{C([0,1])}}$, lo que implica que el qto. de evaluaciones $\{f(x) : f \in \overline{B_\alpha}\}$ a x fijo es acotado (rel. cpta) en $\mathbb{R}$.

Para ver la equicontinuidad, sea $\epsilon > 0$, sabemos que $\forall x, y \in [0,1]$:

$$|f(x) - f(y)| \leq \|f\|_\alpha |x - y|^\alpha \leq |x - y|^\alpha$$

entonces, necesitamos que $|x - y|^\alpha < \epsilon \Leftrightarrow |x - y| < \epsilon^{1/\alpha}$

$\therefore \forall x, y \in [0,1]$ tal $|x - y| < \delta = \epsilon^{1/\alpha} \Rightarrow \forall f \in \overline{B_\alpha} \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon$ 1,3 pts.

Por Arzela-Ascoli, $\overline{B_\alpha}$ es un qto compacto en $C([0,1])$ 2

2 pts.

(iii) Proponemos la indicación: Sea $\eta > 0$, nos ponemos en casos

- Si $|x-y| \geq \eta$, entonces: $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \frac{|f(x)|+|f(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^\alpha} = 2\|f\|_\infty \cdot \eta^{-\alpha}$
- Si $|x-y| < \eta$, entonces: $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} = \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\beta} \cdot |x-y|^{\beta-\alpha} \leq \|f\|_\beta \cdot \eta^{\beta-\alpha}$

Luego: $\|f\|_\alpha \leq \max \{ \|f\|_\beta \cdot \eta^{\beta-\alpha}, 2\|f\|_\infty \eta^{-\alpha} \}$ 1,0 pts.(OJO: esto implica que $C^{\beta}([0,1]) \subseteq C^{\alpha}([0,1])$)Supongamos ahora que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada en $C^{\beta}([0,1])$ y que $f_n \rightarrow f$ en $\|\cdot\|_\infty$ con $f \in C^{\beta}([0,1])$.Notemos que $\exists M \in \mathbb{R}$ tal $\|f_n\|_\beta \leq M \forall n$. Debemos probar que $\|f_n - f\|_\alpha \rightarrow 0$.Sea $\eta > 0$ tal $(M + \|f\|_\beta) \eta^{\beta-\alpha} < \epsilon$.Sea $N_0 \in \mathbb{N}$ tal $\forall n \geq N_0 \quad \|f_n - f\|_\infty < \epsilon \eta^{\alpha/2}$ Luego, $\forall n \geq N_0$:

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_\alpha &\leq \max \{ \underbrace{\|f_n - f\|_\beta \cdot \eta^{\beta-\alpha}}_{\leq (\|f_n\|_\beta + \|f\|_\beta) \cdot \eta^{\beta-\alpha} < \epsilon}, \underbrace{2 \cdot \|f_n - f\|_\infty \eta^{-\alpha}}_{< \epsilon} \} < \epsilon \\ &\leq (M + \|f\|_\beta) \cdot \eta^{\beta-\alpha} < \epsilon \end{aligned}$$

$$\therefore \|f_n - f\|_\alpha \rightarrow 0$$

• $\overline{B}_\beta$ es compacto en $(C^\alpha([0,1]), \|\cdot\|_\alpha)$:

Sea $(f_n)_n$ sucesión de $\overline{B}_\beta$, en particular es acotada (†)
 Por la parte anterior $\exists (f_{n_k})_k$ subsec tal $f_{n_k} \rightarrow f$ en $\|\cdot\|_\infty$
 y $f \in C^\beta([0,1])$ (por †)
 $\therefore f_{n_k} \rightarrow f$ en $\|\cdot\|_\alpha$ 1,0 pts.