PAUTA C1 P2 Parte III

i) Claramente $S: \mathcal{X} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ es función veamos que efectivamente

$(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = S((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in \mathcal{X}$ por lo que debemos verificar.

·) $S((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ estrictamente creciente : esto es claro :)

·) $\delta(S((x_n)_{n\in\mathbb{N}}))$ existe :

$$\delta(S((x_n)_{n\in\mathbb{N}})) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k\in\mathbb{N} : [S((x_n)_{n\in\mathbb{N}})]_k \leq n\}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k\in\mathbb{N} : [(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}]_k \leq n\}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k\in\mathbb{N} . x_{k+1} \leq n\}\right|$$

Pero $|\{k\in\mathbb{N} : x_{k+1} \leq n\}|$ para n grande tal que $x_0 \leq n$

es igual a $|\{k\in\mathbb{N} . x_k \leq n\}| - 1$ por lo que el límite está bien def y la función S queda bien definida.

Notemos que además $\delta(S(x)) = \delta(x)$

Veamos que S es continua:

Sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, veamos que $S^{-1}(B(x,\varepsilon))$ es abierto

Para ello tomemos $y \in S^{-1}(B(x,\varepsilon))$

Sea $\delta > 0$ a fijar y $w \in B(y,\delta)$

$$\Rightarrow d(y,w) < \delta \Rightarrow [\delta(y) - \delta(w)] + \frac{1}{1+K(y,w)} < \delta$$

Luego $d(S(y), S(w)) = [\delta(S(y)) - \delta(S(w))] + \dfrac{1}{1+K(S(y), S(w))}$

Como habíamos notado antes

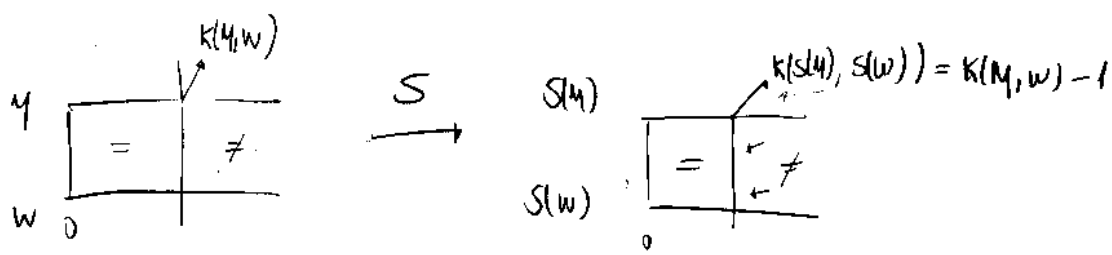
$$\boxed{[\delta(S(y)) - \delta(S(w))] = [\delta(y) - \delta(w)]}$$

Por otro lado como $\dfrac{1}{1+K(y,w)} < \delta \Rightarrow \dfrac{1}{\delta} - 1 < K(y,w)$

por lo tanto si escogemos δ tq $\frac{1}{\delta} - 1 > 1 \iff \delta < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow K(y,w) > 1$ con lo que $\boxed{K(S(y), S(w)) = K(y,w) - 1}$

pues corrimos ambas secuencias hacia la izquierda



Finalmente tratamos de restringir δ de manera que $d(X, S(w)) < \varepsilon$

$$d(X, S(w)) \leq d(X, S(y)) + d(S(y), S(w))$$

$$= d(X, S(y)) + \delta(y) - \delta(w) + \frac{1}{K(y,w)}$$

Sabemos que

$$\delta(y) - \delta(w) < \delta$$

Por otro lado

$$\frac{1}{K(y,w)+1} < \delta \Rightarrow \frac{1}{\delta} - 1 < K(y,w) \Rightarrow \frac{1}{K(y,w)} < \frac{\delta}{1-\delta}$$

Luego

$$d(X, S(w)) \leq d(X, S(y)) + \delta + \frac{\delta}{1-\delta}$$

Queremos que sea $< \varepsilon$

$$d(X, S(y)) + \delta + \frac{\delta}{1-\delta} < \varepsilon$$

$$\delta + \frac{\delta}{1-\delta} < \varepsilon - \delta(X, S(y))$$

(>0 pues $\delta(X, S(y)) < \varepsilon$)

$\delta + \frac{\delta}{1-\delta}$ es una función continua en $[0, 1/2]$, creciente y a $\emptyset$ vale $\emptyset$.

Luego existe $\delta > 0$ tq puedo hacer $\delta + \frac{\delta}{1-\delta}$ tan pequeño como se requiera (en este caso se requiere que sea menor que $\varepsilon - \delta(X, S(y))$)

Por lo que escogiendo δ' tq

$$\delta' + \frac{\delta'}{1-\delta'} < \varepsilon - \delta(X, S(Y)) \qquad y \quad \delta' < 1/2$$

Tenemos que $d(X, S(W)) < \varepsilon$

$$\Rightarrow \forall w \in B(Y\ \delta') \Rightarrow S(w) \in B(X, \varepsilon)$$
$$\Leftrightarrow w \in S^{-1}(B(X, \varepsilon))$$

$$\Rightarrow B(Y, \delta') \subseteq S^{-1}(B(X, \varepsilon)) \Rightarrow S^{-1}(B(X, \varepsilon)) \text{ es abierto}$$

$\Rightarrow S$ es continua.

(Debe haber una manera más corta de demostrar esto!)

j) Sea $X^0 \in X$

Como ya habíamos notado $\delta(S(X^0)) = \delta(X^0)$

$$\Rightarrow \forall m, n \in \mathbb{N} \quad \delta(S^n(X^0)) = \delta(S^m(X^0))$$

$$\Rightarrow d(S^n(X^0), S^m(X^0)) = \frac{1}{1 + k(S^n(X^0), S^m(X^0))}.$$

Notemos que como X^0 es una sucesión creciente estricta $S^m(X^0)$ y $S^n(X^0)$ diferirán en la primera coordenada si $m \neq n$

Ej $x^0 = 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ \ldots$

$S^n(x^0) = n+1 \ n+2 \ n+3 \ n+4 \ \ldots$

$S^m(x^0) = m+1 \ m+2 \ m+3 \ m+4 \ \ldots$

Luego si $n \neq m$ $S^n(x^0)$ y $S^m(x^0)$ siempre difieren en la primera coordenada $\Rightarrow$ $K(S^m(x^0), S^n(x^0)) = 0$

$$\Rightarrow d(S^m(x^0), S^n(x^0)) = 1$$