iii) Se concluye fácilmente ahora que está el trabajo sucio hecho

Gracias a lo anterior tenemos que

$$\hat{\mathcal{F}} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_m$$

es una familia que cubre $\mathbb{R}$.

Notemos que es una familia numerable pues es una unión numerable de conjuntos numerables.

Para cada $I \in \hat{\mathcal{F}}$ consideremos λ_I tq $I \subseteq [a_{\lambda_I}, b_{\lambda_I})$

Luego $\tilde{\mathcal{F}} = \bigcup_{I \in \hat{\mathcal{F}}} \{[a_{\lambda_I}, b_{\lambda_I})\}$ es una familia numerable

y $\mathbb{R} = \bigcup_{I \in \hat{\mathcal{F}}} I \subseteq \bigcup_{I \in \hat{\mathcal{F}}} [a_{\lambda_I}, b_{\lambda_I}) \subseteq \mathbb{R}$ //

PAUTA C1 P1

i) Nos están gritando que usemos Lema de Zorn, así que eso haremos.
Sea $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una cadena en $\mathcal{F}_m$ es decir para cada $\alpha\in A$.

.) $\mathcal{F}_\alpha = \{[\tilde{a}_\beta, \tilde{b}_\beta)\}_{\beta\in B_\alpha}$

.) $\bigcup\limits_{\beta\in B_\alpha} [\tilde{a}_\beta, \tilde{b}_\beta) = [m, c)$ para algún $c\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$

.) $\forall \beta_1, \beta_2 \in B_\alpha\ [\tilde{a}_{\beta_1}, \tilde{b}_{\beta_1}) \cap [\tilde{a}_{\beta_2}, \tilde{b}_{\beta_2}) = \emptyset$

.) $\forall \beta\in B_\alpha\ [\tilde{a}_\beta, \tilde{b}_\beta) \subseteq [a_\lambda, b_\lambda)$ para algún $\lambda\in\Lambda$

y como es cadena se tiene $\forall \alpha_1, \alpha_2\in A\ (\mathcal{F}_{\alpha_1}\subseteq \mathcal{F}_{\alpha_2} \vee \mathcal{F}_{\alpha_2}\subseteq\mathcal{F}_{\alpha_1})$

Sea entonces $\mathcal{F} = \bigcup\limits_{\alpha\in A} \mathcal{F}_\alpha$, probaremos que $\mathcal{F}$ es una

cota superior de $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Debemos entonces verificar que

que $\mathcal{F}\in\mathcal{F}_m$:

.) $\mathcal{F}$ claramente es una familia disjunta pues dado $[\tilde{a}_{\beta_1}, \tilde{b}_{\beta_1})$ con $\beta_1\in B_{\alpha_1}$

y $\beta_2\in B_{\alpha_2}$, sin pérdida de generalidad suponemos $\mathcal{F}_{\alpha_1}\subseteq\mathcal{F}_{\alpha_2}$

$\Rightarrow [\tilde{a}_{\beta_1}, \tilde{b}_{\beta_1}) \in \mathcal{F}_{\alpha_2}$. Luego como $\mathcal{F}_{\alpha_2}\in\mathcal{F}_m$ todos

sus elementos son disjuntos

$\Rightarrow [\tilde{a}_{\beta_1}, \tilde{b}_{\beta_1}) \cap [\tilde{a}_{\beta_2}, \tilde{b}_{\beta_2}) = \emptyset$ ó $[\tilde{a}_{\beta_1}, \tilde{b}_{\beta_1}) = [\tilde{a}_{\beta_2}, \tilde{b}_{\beta_2})$

por lo que se ha probado que $\mathcal{F}$ es una familia disjunta.

.) Sea $[\bar{a},\bar{b}) \in \mathcal{F} \Rightarrow \exists\, \alpha$ tq $[\bar{a},\bar{b}) \in \mathcal{F}_\alpha$

y por lo tanto como $\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{F}_m \Rightarrow \exists\, \lambda \in \Lambda$ tq $[\bar{a},\bar{b}) \subseteq [a_\lambda, b_\lambda)$

.) Finalmente veamos que la unión de los elementos en $\mathcal{F}$ da un intervalo de la forma $[m,c)$

$$\bigcup_{I\in\mathcal{F}} I = \bigcup_{\alpha\in A} \underbrace{\bigcup_{I\in\mathcal{F}_\alpha} I}_{[m,c_\alpha)} = [m, c) \quad \text{para algún } c.$$

Como $\mathcal{F}_m$ es no vacío (pues $m \in [a_\lambda, b_\lambda)$ para algún $\lambda \in \Lambda$, luego $\{[m,b_\lambda)\} \in \mathcal{F}_m$) podemos aplicar Zorn y concluir que $\mathcal{F}_m$ posee un elemento maximal.

ii) Veamos primero que el elemento cubre $[m,\infty)$ supongamos que no, entonces $\exists\ c\in\mathbb{R}$ tq

$$\bigcup_{I\in\mathcal{F}} I = [m,c)$$

Como $\{[a_\lambda,b_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ cubre $\mathbb{R}$ entonces $\exists\ \bar{\lambda}\in\Lambda$

tal que $c\in[a_{\bar\lambda},b_{\bar\lambda})$ entonces

$\mathcal{F}'=\mathcal{F}\cup\{[c,b_{\bar\lambda})\}$ es una cota superior de $\mathcal{F}$

lo que contradice la maximalidad.

Veamos ahora que es numerable consideremos para cada $I\in\mathcal{F}$ un racional $q_I\in I$, por el axioma de elección existe una función de elección

$$C:\mathcal{F}\to\mathbb{Q}$$
$$I\to q_I$$

Notemos que esta función es inyectiva pues si $I\neq I'\Rightarrow I\cap I'=\emptyset$

$\Rightarrow q_I\neq q_{I'}\ \forall I\neq I'\in\mathcal{F}$

$\Rightarrow |\mathcal{F}|\leq|\mathbb{Q}|=|\mathbb{N}|$