

(X, τ) e.t.

P Def: Decimos que $A, B \in \mathcal{C}$ son separados si

$$\bar{A} \cap B = \emptyset \quad \text{y} \quad A \cap \bar{B} = \emptyset$$

①

Sea $Q \subseteq \mathcal{C}$, tal que cada $C \in Q$ es una componente conexa.

$$\text{Sea } Y = \bigcup_{C \in Q} C$$

Si Q es tal que $\forall A, B \in Q \quad \exists A_1, \dots, A_n \in Q$

$$\bullet A_1 = A, A_n = B$$

$\bullet A_i, A_{i+1}$ no son separados

pruebe que Y es conexo.

Dem: Recordemos que Y es conexo ssi $\nexists U, V \in \mathcal{C}_Y$ con $U \cap V = \emptyset$ y $U \cup V = Y$

(o equivalentemente ssi $\nexists U, V \in \mathcal{C}$ con $U \cap V \subseteq Y^c$ y $U \cup V \supseteq Y$)

Supongamos entonces que Y es conexo, luego $\exists U, V \in \mathcal{C}_Y$ con $U \cap V = \emptyset$ y $U \cup V = Y$

Obs: U y V son cerrados también en $\mathcal{C}_Y$ ($V^c = V \cap Y = (U \cup V) \cap V^c = U \cap V^c = U$, con mucho es más fácil)

Consideremos $C_1, C_2 \in Q$ tales que $C_1 \subseteq U$ y $C_2 \subseteq V$

Esto se puede hacer siempre pues cada $C \in Q$ bien está contenido en U o V .

pues sino podríamos "separar" C . Formalmente, supongamos $C \in Q$, $C \cap V \neq \emptyset \neq C \cap U$

Como $Y \in \mathcal{C}$ (unión de abertos) $\Rightarrow U \in \mathcal{C}$ y $V \in \mathcal{C}$ pues $U = Y \cap U'$ con $U', V' \in \mathcal{C}$
 $V = Y \cap V'$

Entonces $C \cap V$ y $C \cap U \in \mathcal{C}_C$

Notemos que $C \cap V \cap C \cap U = C \cap (V \cap U) = \emptyset$

$$C \cap V \cup C \cap U = C \cap (V \cup U) = C \cap Y = C$$

Por lo que hemos demostrado que C no es conexo $\rightarrow \nexists$.

(2)

Tenemos entonces que podemos escoger $C_1 \subseteq U$ y $C_2 \subseteq V$ $C_1, C_2 \in \mathcal{Q}$

Luego por las propiedades de $\mathcal{Q}$ $\exists A_1, \dots, A_n$ tq:

- $A_1 = C_1$
- $A_n = C_2$
- A_i, A_{i+1} no son separados

Probaremos entonces que $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ tq

$$A_i \cap U \neq \emptyset \neq A_i \cap V$$

Así llegaremos a una contradicción (pues antes probamos $\forall C \in \mathcal{Q}, C \subseteq U \vee C \subseteq V$)

Supongamos entonces que $\forall i \in \{1, \dots, n\} A_i \subseteq U \vee A_i \subseteq V$

Como tenemos que $A_1 = C_1 \subseteq U$ y $A_n = C_2 \subseteq V$ debe necesariamente $\exists k$ tal que

$$A_{k-1} \subseteq U \quad A_k \subseteq V$$

En Z_Y tenemos que $\overline{U}^Z = U$ y $\overline{V}^Z = V$

$$\text{Luego } \overline{A_{k-1}}^Z \subseteq \overline{U}^Z = U$$

$$\text{como } \overline{A_{k-1}}^Z = \overline{A_{k-1}} \cap Y \quad (\text{prop})$$

$$\text{Tenemos que } \overline{A_{k-1}} \cap Y \cap A_k = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \overline{A_{k-1}} \cap A_k \cap Y = \emptyset$$

Suponemos $\overline{A_{k-1}} \cap A_k \neq \emptyset$ (pues A_{k-1} y A_k no son separados, no se pierde generalidad)

Esto es una contradicción pues $\emptyset \neq \overline{A_{k-1}} \cap A_k \subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{Q}} C = Y$

$$\Rightarrow \emptyset = \overline{A_{k-1}} \cap A_k \cap Y = \overline{A_{k-1}} \cap A_k \neq \emptyset \quad \square$$

③

P] Considere el espacio $X = \prod_{t \in \mathbb{N}} [0,1]^{[0,1]} = \{ \text{funciones de } [0,1] \text{ en } [0,1] \}$
dotado de la topología producto (o cada componente se considera la usual)

Definamos $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ como sigue:

$\alpha_n(t) = n$ -ésimo dígito de la expansión en base 2 de t

Probar que α_n no tiene subsecuencias convergentes

Dem: Supongamos $\exists \alpha_{n_k} \xrightarrow{\otimes \mathbb{Z}} \alpha \in [0,1]^{[0,1]}$

Luego tendríamos convergencia en cada componente

$$\alpha_{n_k}(t) \xrightarrow{z_n} \alpha(t)$$

$$\text{Sea } \bar{t} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} \quad \text{con } a_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n_k \text{ con } k \text{ par} \\ 0 & \text{si } i = n_k \text{ con } k \text{ impar} \\ 0 & \text{si } i \in \mathbb{N} \setminus \{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

$$\text{Luego } \alpha_{n_k}(\bar{t}) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ es par} \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases} \Rightarrow \alpha_{n_k}(\bar{t}) \text{ no converge.}$$

Esto demuestra que en general la compacidad secuencial no caracteriza a la compacidad.

En métricas esto es verdad, pero recordemos que (de mi clase aux anterior)
que si el producto de espacios es metrizable entonces la cantidad de
espacios "multiplicados" debe ser a lo más numerable

Por lo tanto $[0,1]^{[0,1]}$ no puede ser metrizable

(4)

y por lo tanto no necesariamente compacto $\Leftrightarrow$ secuencialmente compacto

Eso sí α_n es una red, luego posee una subred convergente. (Aquí está:))