

1. Para cada $x \in K$ consideramos $V_x \in \mathcal{K}_x$ abierta y $\bar{V}_x$ cto. Luego: $K \subseteq \bigcup_{x \in K} V_x$
 Por compacidad, $\exists$ subrec. finito, i.e. $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$
 Luego, $\bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$ es abierto y $\bigcup_{i=1}^n \bar{V}_{x_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{V}_{x_i}$ es compacto
 $\Rightarrow$ El V que buscamos es $V = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$

2. ($\Leftarrow$) • X es loc. compacto: Dado $x \in X \Rightarrow x \in V_n$ algún n con $\bar{V}_n$ cto.
 • 2da propiedad: $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bar{V}_n$

($\Rightarrow$) Procedemos de manera inductiva

$n=0$ | K_0 . Por 1., $\exists V_0$ abto con $\bar{V}_0$ cto. t.q. $K_0 \subset V_0$

$n \Rightarrow n+1$ | Suponemos que tenemos V_i $i=1 \dots n$ t.q. $\bar{V}_i$ es cto y $\bar{V}_i \subset V_i \subset V_{i+1}$ para $i \in \{0, \dots, n\}$

Consideramos $K_{n+1} = \bigcup_{i=1}^n \bar{V}_i$. Por 1. $\exists V_{n+1}$ abto con $\bar{V}_{n+1}$ cto t.q. $K_{n+1} \subset V_{n+1}$

Ahora: a) $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ ✓ b) $\bar{V}_n$ cto $\forall n$ ✓
 c) Por la inducción $V_n \subseteq \bar{V}_n \subseteq \bar{V}_n \cup K_{n+1} \subseteq V_{n+1}$ ✓

3. Definamos: $d_K(f, g) = \sup_{x \in K} d(f(x), g(x))$ y $d_{\infty}(f, g) = d_{\bar{V}_K}(f, g)$

Problemas que $\forall K \subset X$ compacto, $\exists n \in \mathbb{N}$ t.q. $K \subseteq V_n$:

Primero $K \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$, luego, por compacidad $\exists n_0, \dots, n_k$ t.q. $K \subseteq \bigcup_{i=1}^k V_{n_i}$

Como los V_n son crecientes, en realidad $K \subset V_{n_k}$

Entonces, como todo $K \subset X$ compacto es t.q. $K \subseteq V_n$, es intuitivo definir la métrica:

$$d(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(f, g)}{2^n}$$

(de ahora en adelante, supondremos que $d \leq 1$, para simplificar los cálculos)

Ver que esta función está bien definida y es una métrica sobre $\mathcal{C}(X, Y)$ es sencillo, por lo que se deja como ejercicio.

Notar que d_K define una métrica en $\mathcal{C}(K, Y)$

$\Rightarrow d_K$ define una pseudométrica en $\mathcal{C}(X, Y)$

Probaremos a continuación la ~~equivalencia~~ ^{igualdad} entre las topologías.

Sea $\mathcal{T}_0$ la topología de la c.m.s.c. y $\mathcal{T}_d$ la generada por d . Probaremos que podemos cubrir los elementos de la base de abiertos en ambas topologías (OTO: esto es más sencillo que lo que hicimos en la auxiliar, pero sigue siendo suficiente para concluir que una topología es más fina que la otra).

(i) $T_d \subseteq T_c$: Sea $f \in C(X)$ y $\epsilon > 0$, consideremos $B(f, \epsilon)$.

Sea N_0 tal $\frac{1}{2^{N_0}} < \frac{\epsilon}{4}$ y consideremos $U = \bigcap_{n=0}^{N_0-1} V(f, \sqrt[n]{\epsilon/4})$

Probamos que $U \subseteq B(f, \epsilon)$:

$g \in U \Leftrightarrow \forall n \in \{0, \dots, N_0-1\} \quad d_{2^n}(g, f) < \epsilon/4$

$$\Rightarrow d(f, g) = \sum_{n=0}^{N_0-1} \frac{d_n(g, f)}{2^n} + \sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{d_n(g, f)}{2^n}$$

$$< \frac{\epsilon}{4} \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{N_0-1} \frac{1}{2^n}}_{\leq 2} + \frac{1}{2^{N_0}} \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}}_{=2} \quad (\text{Para } n \geq N_0 \text{ acoto } d_n(f, g) \leq 1)$$

$$= \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2^{N_0}} \cdot 2 < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$$\therefore d(f, g) < \epsilon \Rightarrow U \subseteq B(f, \epsilon)$$

Luego: $T_d \subseteq T_c$

(ii) $T_c \subseteq T_d$: Consideremos $V(f, \delta) \in \mathcal{U}$ y $g \in V(f, \delta)$.

Sea N_0 tal $K \in V_{N_0} \subseteq V_{N_0}$ y sea $\delta = \frac{\epsilon - d_K(f, g)}{2^{N_0}} > 0$. Luego: $B(g, \delta) \subseteq V(f, \delta)$

$$h \in B(g, \delta) \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(g, h)}{2^n} < \delta \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{d_n(g, h)}{2^n} < \frac{\epsilon - d_K(f, g)}{2^{N_0}}$$

$$\stackrel{n=N_0}{\Rightarrow} d_K(g, h) + d_{N_0}(g, h) < \epsilon \Rightarrow d_K(f, h) \leq d_K(f, g) + d_{N_0}(g, h) < \epsilon$$

$$\therefore B(g, \delta) \subseteq V(f, \delta)$$

~~Se define $U = \bigcap_{k=1}^{\infty} V(f, \delta_k)$, donde $\delta_k = \frac{\epsilon - d_K(f, g)}{2^{N_0}}$. Se define el caso trivial $U = \emptyset$.~~

~~5) $U \neq \emptyset$ ya que $d_K(g, f) < \epsilon$, $K=1, \dots, K$~~

~~Sea N_0 tal $K \in V_{N_0}$ y $\delta = \frac{\epsilon - \max_{i=1, \dots, K} d_i(g, f)}{2^{N_0}} > 0$~~

Así, cada elemento de la subbase se escribe como unión de bolas de T_d . Esto trivialmente se extiende a elementos de la base.

$$\therefore T_c \subseteq T_d$$

(OTC: Para esta última inclusión tenemos que hacer lo mismo de la auxiliar, pero esto se debe a que usamos un argumento basado en elementos de la subbase)

$$4. (\Rightarrow) f_n \rightarrow f \text{ en } T \Rightarrow (\forall K \in \mathcal{C}_{\text{pt}}) \text{ y } (\forall \epsilon > 0) (\exists N_0) (\forall n \geq N_0) \quad d_K(f_n, f) < \epsilon$$

$$\Rightarrow (\forall K \in \mathcal{C}_{\text{pt}}) \quad f_n \rightarrow f \text{ unif. en } K$$

$$(\Leftarrow) \text{ Sea } \epsilon > 0 \text{ y sea } N_0 \text{ tal } \frac{1}{2^{N_0}} < \frac{\epsilon}{4} \text{ y sea } m \text{ tal que } d_m(f_{m_i}, f) < \frac{\epsilon}{4} \quad \forall m_i \in \{0, \dots, N_0-1\} \quad \forall m_i \geq m$$

$$\text{Entonces (ejercicio): } d(f_{m_i}, f) < \epsilon$$

$$\text{En resumen: } (\forall \epsilon > 0) (\exists m \in \mathbb{N}) (\forall m_i \geq m) \quad d(f_{m_i}, f) < \epsilon$$

$$\therefore f_n \rightarrow f \text{ en } T_d = T_c$$

5. Sea $K \subseteq X$ cpto. Como $C(X, Y)$ es métrico, $\{f_n\}_n \subset C(X, Y)$ posee subsuc. conv. $(f_{n_k})_k$ en $T_d = T_c$.

$$\xrightarrow{4} f_{n_k} \longrightarrow f \text{ unif. en } K$$

$\therefore \{f|_K | f \in H\}$ es rel. cpto. en $C(K, Y)$ (métrico con d_K)

6. Probamos que si: $K_1 \subseteq K_2$, entonces $g_{K_1} = g_{K_2}|_{K_1}$

Por hipótesis: $d_{K_1}(f_n, g_{K_1}) \rightarrow 0 \wedge d_{K_2}(f_n, g_{K_2}) \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \forall x \in K_1 \quad d(f_n(x), g_{K_1}(x)) \rightarrow 0 \wedge d(f_n(x), g_{K_2}(x)) \rightarrow 0$$

Por unicidad del límite: $g_{K_1}(x) = g_{K_2}(x) \quad \forall x \in K_1$

Ahora definimos $g: X \rightarrow Y$ tal que $g(x) = g_K(x)$ si $x \in K$

Notamos que g está definida en todo X pues X es local% cpto.

y toma un único valor $\forall x \in X$ por lo que probamos anteriormente.

$g \in C(X, Y)$ pues es continua ($= g_K|_K$) sobre cada compacto $K \subseteq X$

y pues X es localmente compacto.

Probamos finalmente que $f_n \rightarrow g$ en T_c . Sea K cpto. en X .

$$\Rightarrow f_n \rightarrow g_K = g|_K \text{ unif. en } K$$

$$\therefore f_n \rightarrow g \text{ unif. en } K$$

7. Falta ver $(\Leftarrow)$. Tomamos la familia $V_n \nearrow X$ y usamos un argumento

diagonal.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
V_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
V_1	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
V_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
V_3	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
V_4	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6

Para $n=0$ $\exists$ subsec. conv. en V_0

Lo que resulta está $\in$ en $\{f|_{V_1} | f \in H\}$

$\therefore$ posee subsuc. convergente en V_1

e iteramos inductivamente

(*) refinándonos a los índices que quedan y restringiendo estos f_{n_k} a V_1

Luego escogemos los primeros elementos de cada subsuc. de manera estrictamente creciente (dibujados en $\square$).

Probamos que esta subsecución es convergente en T_c .

Sea $K \subseteq X$ cpto. Sea N_0 tal $K \in V_{N_0}$. Como f_{n_k} a partir de cierto índice es subsuc. de la subsecución N_0 -ésima (que es convergente sobre V_{N_0}), entonces $f_{n_k} \rightarrow f$ unif. sobre $K \in V_{N_0}$

$$\xrightarrow{4} f_{n_k} \longrightarrow f \text{ en } T_c$$

8. H es relativamente cpto ssi $\forall K \subseteq X$ cpto $\{f|_K | f \in H\}$ es rel. cpto. en $C(K, Y)$

ssi $\forall K \subseteq X$ cpto (a) $\{f|_K | f \in H\}$ es equicontinua

(b) $\forall x \in K \quad \{f(x) | f \in H\}$ es rel. cpto en Y