

Examen MA38B – Análisis I

9 de Diciembre, 2005

Prof: J. Dávila

Auxiliares: M. Bravo, M. Duarte

1. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado sobre $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ e Y un subespacio vectorial cerrado de X . Denotemos por $P : X \rightarrow X/Y$ la proyección canónica.

a) (20 %) Muestre que

$$\|Px\|_{X/Y} = \inf_{y \in Y} \|x - y\|$$

define una norma en X/Y .

b) (50 %) Pruebe que si X es Banach entonces X/Y es Banach.

Ind.: escribamos $[x] = P(x)$. Dada una sucesión de Cauchy $([x_n])_{n \geq 1}$ en X/Y pruebe que

■ *existe una subsucesión x_{n_k} tal que*

$$\|[x_{n_k}] - [x_{n_{k+1}}]\|_{X/Y} \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 1.$$

■ *para cada k existe $y_k \in Y$ tal que*

$$\|x_{n_k} - y_k - (x_{n_{k+1}} - y_{k+1})\| \leq \frac{1}{2^{k-1}} \quad \forall k \geq 1.$$

■ *$x_{n_k} - y_k$ es de Cauchy.*

c) (30 %) Demuestre que si $x \in X \setminus Y$ entonces existe $\varphi : X \rightarrow K$ lineal continua tal que $\varphi(y) = 0 \quad \forall y \in Y$ y $\varphi(x) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in Y\}$.

Ind.: utilice el teorema de Hahn-Banach en el espacio vectorial normado X/Y .

2. Considere $\ell^\infty = \{x = (x_n)_{n \geq 1} \mid x_n \in \mathbb{R}, \sup_{n \geq 1} |x_n| < \infty\}$ con la norma $\|x\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |x_n|$ donde $x = (x_n)_{n \geq 1}$.

a) (30 %) Pruebe que $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ es completo (no es necesario verificar que $\|\cdot\|_\infty$ es norma).

b) (20 %) Verifique que $c_0 = \{x = (x_n)_{n \geq 1} \in \ell^\infty \mid \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$ es un subespacio vectorial cerrado de ℓ^∞ . De ahora en adelante se considera c_0 con $\|\cdot\|_\infty$.

c) (30 %) Definamos $\ell^1 = \{y = (y_n)_{n \geq 1} \mid y_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^\infty |y_n| < \infty\}$ que es un Banach real con la norma $\|y\|_1 = \sum_{n=1}^\infty |y_n|$, donde $y = (y_n)_{n \geq 1}$ (no es necesario probar esto último).

Para $y \in \ell^1$, $y = (y_n)_{n \geq 1}$ definimos $\varphi_y : c_0 \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $\varphi_y(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$, $x = (x_n)_{n \geq 1}$. Verifique que la serie $\sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ converge. Pruebe además que $\varphi_y : c_0 \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal continua, es decir $\varphi_y \in c_0^*$, y que

$$\|\varphi_y\|_{c_0^*} = \|y\|_1.$$

d) (20 %) Pruebe que para todo $z : c_0 \rightarrow \mathbb{R}$ lineal continua existe $y \in \ell^1$ tal que $z = \varphi_y$.

Ind.: definamos $e^{(n)} \in c_0$ tal que todos los términos son cero excepto el n -ésimo que vale 1 (es decir $e^{(n)} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ con el 1 en la posición n). Dado $z \in c_0^$ definamos $y_n = z(e^{(n)})$ e $y = (y_n)_{n \geq 1}$. Verifique que $y \in \ell^1$ y que $z(x) = \varphi_y(x)$ para todo $x \in c_0$, $x = (x_n)_{n \geq 1}$ con la propiedad $x_n = 0$ para n suficientemente grande. Luego argumente por densidad.*

3. En $C([0, 1], \mathbb{C})$ se define el producto interno y la norma

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Para $f \in C([0, 1], \mathbb{C})$ definimos también

$$\|f\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|.$$

Sea $X \neq \emptyset$ un subespacio vectorial de $C([0, 1], \mathbb{C})$ tal que $(X, \|\cdot\|_2)$ sea completo.

a) (40 %) Pruebe que existe $M > 0$ tal que $\|f\|_\infty \leq M\|f\|_2$ para todo $f \in X$.

Ind.: utilice el teorema del grafo cerrado.

b) (30 %) Sea $\{f_1, \dots, f_n\}$ un conjunto ortonormal en X . Para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ definimos $f_x(t) = \sum_{i=1}^n x_i f_i(t)$. Verifique

$$|f_x(t)| \leq M \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad \forall t \in [0, 1], \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

c) (30 %) Deduzca que $\sum_{i=1}^n |f_i(t)|^2 \leq M^2 \forall t \in [0, 1]$. Concluya que X tiene dimensión finita.

Ind.: $\sum_{i=1}^n |f_i(t)|^2 = f_x(t)$ para algún $x \in \mathbb{C}^n$ conveniente. Luego integre la desigualdad obtenida.