MA38B – Análisis I

Control 3

5 de Noviembre, 2005 Prof: J. Dávila

Auxiliares: M. Bravo, M. Duarte

Pregunta 1. Sea $k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y definamos

$$Tf(x) = \int_a^b k(x,y) f(y)\, dy, \qquad f \in C([a,b],\mathbb{R}).$$

Se considera $C([a,b],\mathbb{R})$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$.

a) Muestre que $T : C([a,b],\mathbb{R}) \to C([a,b],\mathbb{R})$ está bien definida y que $\{f \in C([a,b],\mathbb{R}) \,|\, Tf = f\}$ es cerrado.

b) Pruebe que $\{Tf \,|\, \|f\|_\infty \leq M\}$ es relativamente compacto para la topología de $\|\cdot\|_\infty$ para todo $M \geq 0$.

c) Deduzca que $\{f \in C([a,b],\mathbb{R}) \,|\, Tf = f\}$ es un espacio vectorial de dimensión finita.

Pregunta 2.

a) Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach de dimensión infinita. Utilizando el teorema de Baire pruebe que X no puede tener una base (en el sentido de espacio vectorial) numerable.

b) Sea X un espacio topológico, (Y,d) un espacio métrico. Pruebe que si $f_n : X \to Y$ es una sucesión equicontinua tal que $f_n \to f$ puntualmente en X (no se supone que $f : X \to Y$ sea continua), entonces

$$f_n \to f \quad \text{uniformement en } K \text{ para todo } K \subset X \text{ compacto.}$$

Demuestre además que f es continua.

Pregunta 3.

a) Pruebe que toda función continua $f : S^1 \to \mathbb{C}$ se puede aproximar uniformemente por una función de la forma

$$\sum_{k=-n}^{n} a_k z^k$$

(para algún $n \in \mathbb{N}$ y $a_k \in \mathbb{C}$). ¿Es posible aproximar uniformemente toda $f : S^1 \to \mathbb{C}$ continua mediante funciones de la forma $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$?

b) Demuestre que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es 2π-periódica, continua y satisface

$$\int_0^{2\pi} f(x) e^{ikx}\, dx = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

entonces $f = 0$.

Tiempo: 3:30 horas.