MA38B – Análisis I
Control 2

8 de Octubre, 2005 — Prof: J. Dávila

Auxiliares: M. Bravo, M. Duarte

Pregunta 1. (35 %)

a) i) (1/7) Sean (Y_n, d_n), $n \in \mathbb{N}$ espacios métricos. Pruebe que

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\min(d_n(x_n, y_n), 1)}{2^n}, \quad x = (x_n)_{n\in N},\ y = (y_n)_{n \in N}$$

es una métrica en $Y = \prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ cuya topología asociada coincide con la topología producto.

ii) (1/7) Demuestre que si $\{X_i | i \in I\}$ es una familia de espacios topológicos tales que que

$$|\{i \in I | X_i \text{ no es indiscreto}\}| > \aleph_0$$

entonces $\prod_{i\in I} X_i$ no es metrizable.

b) Sea X un espacio normal, Hausdorff con base numerable de abiertos $\mathcal{B} = \{A_n | n \in \mathbb{N}\}$ y definamos

$$I = \{f : X \to [0,1] \,|\, f \text{ es continua y existen } A_n,\ A_m \in \mathcal{B} \text{ tales que } \overline{A}_n \subset A_m,\ f \equiv 0 \text{ en } A_n,\ f \equiv 1 \text{ en } X \setminus A_m\ \}.$$

Sea $\Phi : X \to [0,1]^I = \prod_{f \in I} [0,1]$ definida mediante

$$\Phi(x)(f) = f(x).$$

i) (1/7) Demuestre que Φ es inyectiva y continua.

ii) (1/7) Pruebe que $\Phi : X \to \Phi(X)$ es abierta y luego un homeomorfismo de X en $\Phi(X)$.

iii) (1/7) Concluya que X es metrizable.

iv) (1/7) Pruebe que si X es además compacto entonces $\Phi(X)$ es cerrado.

c) (1/7) Muestre que si (X, d) es un espacio métrico separable entonces tiene base numerable de abiertos y deduzca la equivalencia: X es normal Hausdorff con base numerable de abiertos si y sólo si X es metrizable y separable.

Pregunta 2. (35 %)

Se define el espacio proyectivo real $\mathbb{R}P^n$ como el espacio topológico $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$x \sim y \iff \text{existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } x = \lambda y.$$

a) (1/7) Muestre que $\mathbb{R}P^n$ es un espacio compacto y conexo.

b) (1/7) Pruebe que $\mathbb{R}P^n$ es Hausdorff.

c) (1/7) Sea $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ y considere el hiperplano afín M_x de $\mathbb{R}^{n+1}$ que pasa por x y cuya normal es x, es decir

$$M_x = \{y \in R^{n+1} | \langle y - x, x\rangle = 0\}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno usual en $\mathbb{R}^{n+1}$. Sea $\varphi_x : M_x \to \mathbb{R}P^n$ definida por $\varphi_x(y) = [y]$.

Pruebe que $\varphi_x(M_x)$ es una vecindad abierta de $[x]$ y que $\varphi_x : M_x \to \varphi_x(M_x)$ es un homeomorfismo.

d) (1/7) Demuestre que $\mathbb{R}P^n$ tiene base numerable de abiertos.

e) (1/7) Deduzca que la topología de $\mathbb{R}P^n$ es metrizable.

f) (1/7) Pruebe que $\mathbb{R}P^1 \simeq S^1$.

g) (1/7) Muestre que si $f : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ es una sección de la proyección $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n$, $p(x) = [x]$, entonces f no es continua (f es una sección de la proyección si $p \circ f = id$).

Ind: considere el conjunto de $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $\langle f([x]), x\rangle > 0$.

Pregunta 3. (30 %)

a) (2/5) Sea $Q = [0, 1] \times [-2, 2]$ y

$$C = \{\, (x, \sin(1/x)) \,|\, 0 < x \leq 1 \,\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Pruebe que $D = Q \setminus C$ es conexo. ¿Es D conexo por caminos?

b) Sea $X = [0, 1]^{[0,1]}$ con la topología producto.

i) (1/5) Muestre que $D = \{f : [0, 1] \to [0, 1] \,|\, f \text{ es continua } \}$ es denso en X y deduzca que X es separable.

ii) (1/5) Sea Y el conjunto de las funciones $f \in X$ tal que $f = 0$ en todo punto de $[0, 1]$ excepto uno donde vale 1. Demuestre que Y es discreto y que no es separable.

iii) (1/5) Verifique que $\overline{Y} \setminus Y = \{g\}$ y encuentre g. Pruebe que toda vecindad de g contiene todos los elementos de Y salvo un número finito.