MA38B - Análisis 29 de Septiembre, 2005

Clase Auxiliar

Profesor: *Juan Dávila* Auxiliares: *Mario Bravo, Mauricio Duarte*

1. Variedades de Grassman

Sean $n \geq 1,\ 0 \leq k \leq n$ naturales. La *variedad de Grasmann de orden* (n, k) es el conjunto

$$G(n, k) = \{E \subseteq \mathbb{R}^n \mid E \text{ es un sev de dimensión } k\}$$

Le daremos a $G(n, k)$ una topología de espacio cuociente. Sea

$$B(n, k) = \left\{(v_1, \dots, v_k) \in (\mathbb{R}^n)^k \mid \{v_1, \dots, v_k\} \text{ es un conjunto ortonormal en } \mathbb{R}^n\right\}$$

(a) Muestre que $B(n, k)$ es un subespacio compacto de $(\mathbb{R}^n)^k \cong \mathbb{R}^{nk}$.

Definamos la relación de equivalencia $\curlyvee$ en $B(n, k)$ mediante

$$(v_1, \dots, v_k) \curlyvee (w_1, \dots, w_k) \Leftrightarrow \langle\{v_1, \dots, v_k\}\rangle = \langle\{w_1, \dots, w_k\}\rangle$$

donde "$\langle\cdot\rangle$" significa *subespacio generado por*.

(b) Muestre que la función

$$\begin{array}{rccc} q\colon & B(n,k)/\curlyvee & \longrightarrow & G(n,k) \\ & (v_1, \dots, v_k) & \longmapsto & \langle\{v_1, \dots, v_k\}\rangle \end{array}$$

es una biyección. Damos a $G(n, k)$ la única topología que hace a q un homeomorfismo.

(c) Para $x \in \mathbb{R}^n$ fijo, sea

$$\begin{array}{rccc} f_x\colon & G(n,k) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & E & \longmapsto & d(x,E)^2 \end{array}$$

Muestre que f_x es una función continua.

(d) Concluir que $G(n, k)$ es un espacio de Hausdorff compacto.

Sea $E_0 \in G(n, k)$ un elemento fijo. Definimos el subconjunto

$$V(E_0) = \left\{E \in G(n, k) \mid E \cap E_0^\perp = \{0\}\right\} = \left\{E \in G(n, k) \mid E \oplus E_0^\perp = \mathbb{R}^n\right\} \subseteq G(n, k)$$

donde $E_0^\perp$ es el subespacio ortogonal a E_0.

(e) Muestre que $V(E_0)$ es un abierto que contiene a E_0.

Sea $\mathcal{L}(E_0, E_0^\perp)$ el conjunto de transformaciones lineales de E_0 en $E_0^\perp$. Fijando una base en E_0 y otra en $E_0^\perp$ podemos identificar $\mathcal{L}(E_0, E_0^\perp)$ con el conjunto de matrices reales de $k \times (n-k)$, y éste último con $\mathbb{R}^{k(n-k)}$. $\mathcal{L}(E_0, E_0^\perp)$ recibirá la topología inducida por esta identificación. Teniendo en mente que $\mathbb{R}^n = E_0 \oplus E_0^\perp$, definimos la función

$$\begin{array}{rccl} \varphi_{E_0}\colon & \mathcal{L}(E_0, E_0^\perp) & \longrightarrow & V(E_0) \\ & T & \longmapsto & \{v \oplus Tv \mid v \in E_0\} \end{array}$$

(f) Mostrar que φ_{E_0} está bien definida y que es un homeomorfismo.
Indicación: Sean $P_{E_0} : \mathbb{R}^n \longrightarrow E_0$ y $P_{\mathbb{E}_0^\perp} : \mathbb{R}^n \longrightarrow E_0^\perp$ las proyecciones ortogonales. Note que $E \in V(E_0) \Leftrightarrow P_{E_0}\,|_E\colon E \longrightarrow E_0$ es un isomorfismo. Para una base ortonormal fija $\{v_1, \ldots, v_k\}$ de E_0 existe una única base $\{w_1, \ldots, w_k\}$ de E tal que $P_{E_0}(w_i) = v_i$. Si $E = \varphi_{E_0}(T)$ se tiene la identidad $w_i = v_i + T(v_i)$.

Así, $G(n,k)$ es *localmente homeomorfo* a $\mathbb{R}^{k(n-k)}$, es decir, todo $E_0 \in G(n,k)$ tiene una vecindad abierta homeomorfa a $\mathbb{R}^{k(n-k)}$. Un espacio topológico Hausdorff X talque $(\exists m \in \mathbb{N})$ X es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^m$ se llama *variedad topológica* de dimensión m. Acabamos de probar que $G(n,k)$ es una variedad topológica de dimensión $k(n-k)$

(g) Pruebe que $G(n,k)$ tiene una base de abiertos numerable.

2. Compactificación de Alexandroff

Sea E un e.t. Hausdorff, localmente compacto, pero no compacto. Existe un e.t. Hausdorff, compacto, $\hat{E}$ y un homeomorfismo f de E sobre un subconjunto denso $f(E)$ de $\hat{E}$, tal que $\hat{E} \backslash f(E)$ es un singleton que denotamos ω. Se dice que $\hat{E}$ es la compactificación de Alexandroff de E. Al punto ω se le llama punto en el infinito. Si existe otro espacio E' que satisfaga las mismas propiedades anteriores, entonces $\hat{E}$ y E' son homeomorfos.

3. Ejemplo de un conjunto conexo pero no conexo por caminos

Sean los conjuntos:

$$\begin{aligned} E_1 &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y = \operatorname{sen}(1/x)\big\} \\ E_2 &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0,\ -1 \leq y \leq 1\big\} \end{aligned}$$

Tanto E_1 como E_2 son conexos por arcos, pero el conjunto $E_1 \cup E_2$ no lo es.