MA38B Análisis. Semestre 2007-02
Profesor: Roberto Cominetti **Auxiliares:** Cristóbal Guzmán y Felipe Olmos

Guía 2

27 de Septiembre de 2007

P1.- *Redes Universales*

Sea X un conjunto y $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una red en X. Dado $A \subseteq X$ se dice que:

$$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ entra frecuentemente en A si } (\forall\lambda\in\Lambda)\ (\exists\lambda'\geq\lambda) \text{ tal que } x_{\lambda'}\in A$$
$$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ entra eventualmente en A si } (\exists\lambda\in\Lambda)\ (\forall\lambda'\geq\lambda) \text{ tal que } x_{\lambda'}\in A$$

Decimos que una red $(y_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}}$ en un conjunto X es universal si:

$$(\forall A\subseteq X)\quad ((y_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}} \text{ entra eventualmente en } A) \text{ o } ((y_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}} \text{ entra eventualmente en } A^C)$$

1. Pruebe que toda subred de una red universal es universal.
2. Sea $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una red universal en el conjunto X y $f : X \longrightarrow Y$. Muestre que $(f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ es una red universal en Y.
3. Sea X un espacio topológico y $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una red universal en X. Muestre que si x es un punto de acumulación de (x_λ) entonces (x_λ) converge a x.
4. Muestre que toda red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tiene una subred universal. Para esto defina $\mathcal{A}$ como la colección de todos los subconjuntos $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}(X)$ que satisfacen:

$$(\forall A, B\in\mathcal{C})\quad A\cap B\in\mathcal{C}$$
$$(\forall A\in\mathcal{C})\quad (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\text{entra frecuentemente en } A$$

   y pruebe que:

   a) $\mathcal{A}$ tiene un elemento maximal para la inclusión.
   b) Si $\mathcal{C}$ es un elemento maximal de $\mathcal{A}$ entonces $X\in\mathcal{C}$ y $B\in\mathcal{C}$, $B\subseteq B' \Rightarrow B'\in\mathcal{C}$.
   c) Si $\mathcal{C}$ es un elemento maximal de $\mathcal{A}$ entonces

$$(\forall A\subseteq X)\quad A\in\mathcal{C} \text{ o} A^C\in\mathcal{C}$$

   d) Si $\mathcal{C}$ es un elemento de $\mathcal{A}$ entonces $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tiene una subred $(x_{\lambda_\beta})_{\beta\in\mathcal{B}}$ tal que para todo $A\in\mathcal{C}$ (x_{λ_β}) entra eventualmente en A. Concluya.
5. Sean $(Y_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos compactos, X un conjunto y $f_i : X \longrightarrow Y_i$ funciones. Muestre que si $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una red en X, entonces existe una subred $(x_{\lambda_\beta})_{\beta\in\mathcal{B}}$ tal que $(f_i(x_{\lambda_\beta}))_{\beta\in\mathcal{B}}$ es convergente para todo $i\in I$.
6. Con este último resultado pruebe el Teorema de Tychonoff.

P2.- *El Conjunto de Cantor*

Sea $E_1 = [0,1]$ y removamos el abierto $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. Lo que queda entonces será $E_2 = E_1 \setminus (\frac{1}{3},\frac{2}{3}) = [0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$. Construimos E_n inductivamente removiendo los medios tercios como sigue:

$$\forall n\geq 2\quad E_n = E_{n-1}\setminus\bigcup_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1+3k}{3^n},\frac{2+3k}{3^n}\right)$$

Finalmente definimos el conjunto de Cantor: $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$.

1. (Expansiones p-ádicas) Sea $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ y sea $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}^*1}\{0, 1, \ldots, p-1\}^{\mathbb{N}^*}$. Definimos $L_p(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{p^i}$

   a) Pruebe que $L_p(x)$ está bien definida y que $L_p(x) \in [0, 1]$. En adelante consideramos $p = 3$ (a pesar de que este desarrollo puede hacerse para cualquier p).

   b) Pruebe que es sobreyectiva. Para esto tome un $z \in [0, 1]$ y considere:

   $$g(z) = \begin{cases} 0 & z \in [0, \frac{1}{3}) \\ 1 & z \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ 2 & z \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

   Construya $(x_i)_i$ como sigue:

   - $x_1 = g(z)$. Notando que $z - \frac{g(z)}{3} \in [0, \frac{1}{3}]$ podemos definir
   - $x_2 = g(3z - x_1)$. Inductivamente tenemos que
   - $x_{i+1} = g\left(3^i z - \sum_{k=1}^{i} 3^{i-k} x_k\right) = g(3^i z - 3^{i-1}x_1 - \ldots - x_i)$

   Pruebe la observación y que $L_3((x_i)_i) = z$.

   c) ¿Qué ocurre con la expansión triádica dada por la fórmula anterior al eliminar los medios tercios?

   d) Pruebe finalmente que si la sucesión de x_i no posee unos, la expansión triádica es única. Concluya que L_3 es una biyección entre $\{0, 2\}^{\mathbb{N}^*}$ y C.
   ¿Cuál es el cardinal de C?

2. (Topología de C) Dotamos a C de la topología traza de $\mathbb{R}$.

   a) Pruebe que C es compacto y concluya que C es un e.m. completo.

   b) Pruebe que C no posee puntos aislados, con lo cual C es un conjunto perfecto (ie: $C' = C$).

   c) Pruebe que C posee interior vacío (para esto note que los medios tercios extraídos son un conjunto denso en $[0, 1]$).

   d) Pruebe que C es totalmente disconexo, es decir, sus componentes son el vacío y los singleton.
   Hint: Pruebe que $(\forall a, b \in C)\,(a < b)\,(\exists r \notin C)\, a < r < b$.

   e) Si dotamos a $\{0, 2\}^{\mathbb{N}^*}$ de la topología producto de las partes de $\{0, 2\}$ pruebe que L_3 es un homeomorfismo.

3. (Algo de Topología Producto)

   a) Suponga que $\forall a \in A$ X_a es un e.t.. Sean B, C conjuntos tales que $B \cap C = \emptyset$ y $B \cup C = A$. Pruebe que:

   $$\prod_{a\in A} X_a \simeq \left[\prod_{b\in B} X_b\right] \times \left[\prod_{c\in C} X_c\right]$$

   Concluya que $X^A \simeq X^B \times X^C$ si X es e.t. y A, B y C como antes.

   b) Pruebe que si B y C son cjtos. equipotentes, y $X \simeq Y$ (ambos e.t.) entonces: $X^B \simeq Y^C$.

   c) Usando lo anterior pruebe que:

   $$\forall k \in \mathbb{N} \quad C^k \simeq C$$
   $$C^{\mathbb{N}} \simeq C$$

   d) Pruebe finalmente que existe $h : C \to [0, 1]^k$ sobreyectiva y continua y usando el Teo. de Tietze concluya que existe $\tilde{h} : [0, 1] \to [0, 1]^k$ continua y extensión de h.
   Hint: Considere la función f de la parte 4.
   Generalice al Cubo de Hilbert $I^\infty = \prod_{n\in\mathbb{N}} [0, 1]$ dotado de la topología producto.

4. (Escalera de Cantor)
   Sea $x \in [0, 1]$ con expansión ternaria $(a_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$. Definamos $N = \infty$ si para todo $(i \in \mathbb{N}^*)\, a_i \neq 1$, y en caso contrario N será el valor más pequeño de i tal que $a_i = 1$. Sea $b_i = a_i/2$ para $n < N$ y $b_N = 1$.

   a) Muestre que $\sum_{i=1}^{N} \frac{b_i}{2^i}$ es independiente de la expansión ternaria de x.

   b) Pruebe que $f(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{b_i}{2^i}$ es una función continua y monótona en $[0, 1]$. Muestre que f es constante en cada intervalo contenido en el complemento de C y que f es sobreyectiva en $[0, 1]$.