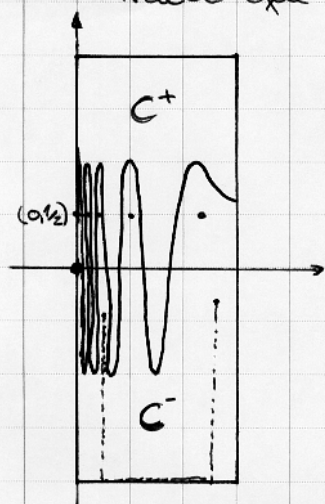


P11/12 (a) Sea $Q = [0,1] \times [-2,2]$ y $C = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid 0 < x \leq 1\} \cup \{(0,0)\}$
 Pruebe que $D = Q \setminus C$ es conexo. ¿Es conexo por caminos?



Sean: $C^\pm = \{(x,y) \mid 0 < x \leq 1 \wedge y \gtrless g(x)\}$ con

$$g(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Notamos primero que $(0, \frac{1}{2}) \in \bar{C}^-$ (ver dibujo), con lo cual $C^- \cup \{(0, \frac{1}{2})\}$ es conexo, pues C^- es conexo (más aún C^+ y C^- son conexos por caminos, ver dibujo).

Como además $(0, \frac{1}{2}) \in C^+$, entonces:

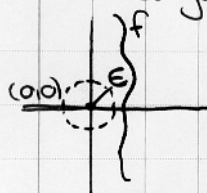
$$[C^- \cup \{(0, \frac{1}{2})\}] \cup C^+ = C^- \cup C^+ = D \quad \wedge \quad [C^- \cup \{(0, \frac{1}{2})\}] \cap C^+ = \{(0, \frac{1}{2})\} \neq \emptyset$$

Y como ambos q'tos son conexos $\Rightarrow D$ es conexo

Probaremos ahora que D no es conexo por caminos. Por contradicción, supongamos que existe $f: [0,1] \rightarrow Q$ continua t.q. $f(0) \in C^+$, $f(1) \in C^-$ y $f([0,1]) \subseteq D$.

Escribamos $f(t) = (x(t), y(t))$ y sea $h(t) = y(t) - g(x(t))$

Entonces se tiene que $h(0) > 0$ y $h(1) < 0$. Si h fuera continua estaríamos listos usando el T.V.I., pero como no lo es debemos reparar el argumento.



Como sabemos que la curva no pasa por $(0,0)$ y es compacta, entonces es posible aislar con una bola (pues su distancia a $(0,0)$ alcanza un mínimo que es $\epsilon > 0$)

$$\therefore \exists \epsilon > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall t \quad \|f(t)\| \geq \epsilon$$

Consideremos la s'gte.

Modificación de g

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & x_0 < x \leq 1 \\ 0 & 0 \leq x \leq x_0 \end{cases} \quad \text{con } x_0 \in (0, \epsilon)$$

t.q. $\sin(\frac{1}{x_0}) = 0$
 $\Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{k\pi}$

Entonces $\tilde{g}$ es continua y $\tilde{h}(t) = y(t) - \tilde{g}(x(t))$ es continua y t.q.:

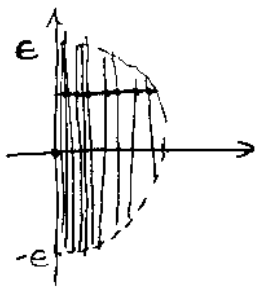
(*) $h(0) > 0$, $h(1) < 0$, entonces (por T.V.I.) $\exists t_0 \in (0,1)$ t.q. $h(t_0) = 0$

$$\exists t_0 \quad \text{t.q.} \quad y(t_0) = \tilde{g}(x(t_0))$$

Por casos:

- Si $x(t_0) < x_0 \Rightarrow y(t_0) = 0$ ~~no~~ pues $\|x(t_0), y(t_0)\| > \epsilon$
- Si $x(t_0) \geq x_0 \Rightarrow y(t_0) = \sin(\frac{1}{x(t_0)})$ ~~no~~ pues esto equivale a $f(t_0) \in D$

(b) Pruebe que C no es localmente compacto (es decir, que posea una vec. abta. de adherencia compacta), ni localmente conexo (todo pto. posee una base de vec. conexas).



Probaremos que $(0,0)$ no posee vec. compacta. Sea $B(0,\epsilon) \cap C$ vec. de $(0,0)$. Entonces toda línea horizontal a altura $\neq 0$ (por ej. $\epsilon/2$) posee una suc. que no tiene pto. de acumulación en este conjunto (pues converge a $(0, \epsilon/2) \notin V$). Entonces V no es sec. cpto. $\Rightarrow$ no es compacto.
 $\therefore C$ no es localmente compacto.

P2 Sea (X,d) espacio métrico compacto. Pruebe la equivalencia de las propiedades sigtes.:

- X es conexo
- $\forall x, y \in X, \forall \epsilon > 0$, existe una cadena de paso ϵ de x a y , i.e.:

$$\boxed{\exists x_0, \dots, x_m \text{ tal } x_0 = x, x_m = y, d(x_i, x_{i+1}) \leq \epsilon \quad \forall 0 \leq i \leq m-1}$$

$\Rightarrow$ Sea $x \in X$ y $\epsilon > 0$, definimos $A = \{y \in X \mid \exists \text{ cadena de paso } \epsilon \text{ de } x \text{ a } y\}$

• $A \neq \emptyset$: $x \in A$

• A es abierto: Sea $y_0 \in A$. Entonces $B(y_0, \epsilon) \subset A$, ya que si $x_0, \dots, x_m$ es una cadena de paso ϵ de x a y_0 , entonces $x_0, \dots, x_m = y_0, y$ es una cadena de paso ϵ de x a y .

• A es cerrado: Sup. $y_0 \in \bar{A}$. Entonces $B(y_0, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$. Tomamos $y_1 \in B(y_0, \epsilon) \cap A$, entonces $x_0 = x, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m = y_1$ es una cadena de paso ϵ de x a y_1 , tenemos que $x_0, \dots, x_m, y_0$ es una cadena de paso ϵ de x a y_0 .
 $\Rightarrow y_0 \in A \quad \therefore A$ es cerrado.

Se concluye por la conexidad de X que $A = X$.

$\Leftarrow$ Sup X no conexo, entonces existen U, V abts. disjuntos tal: $X = U \cup V$.

Notar que U y V son cerrados, y luego cpto.

$$\Rightarrow d(U, V) = \inf_{x \in U, y \in V} d(x, y) > 0 \quad (U, V \text{ cpto. } d \text{ continua y } d > 0 \text{ en } U \times V)$$

Para $\epsilon = \frac{1}{2} d(U, V)$ no existe cadena entre $x \in U$ y $y \in V$. Supongamos que si, entonces $x_0 = x, x_1, \dots, x_m = y, d(x_i, x_{i+1}) \leq \epsilon \quad \forall 0 \leq i \leq m-1$.

Si consideramos $j \geq 1$ el primer índice tal $x_j \in V$. Entonces

$$\boxed{x_{j-1} \in U, x_j \in V, d(x_{j-1}, x_j) \leq \epsilon}$$

↗ pues $d(x_{j-1}, x_j) \geq d(U, V) = 2\epsilon$

P3/1 (COMPACTIFICACIÓN DE ALEXANDROFF)

Sea E un e.t. Hausdorff y localmente compacto (todo pto. posee una vec. de adhi. compacta), pero no compacto. Pruebe que existe $\hat{E}$ e.t. compacto y un homeomorfismo de E en un subto. denso de $\hat{E}$.

Además $\hat{E} \setminus \varphi(E)$ es un singleton (pto en el infinito, ∞). Además $\hat{E}$ es Hausdorff.

Dem.: Consideremos $\infty \notin E$ y definimos $(\hat{E}, \hat{\tau})$ como sigue:

$$\hat{E} = E \cup \{\infty\} \quad \hat{\tau} = \tau \cup \{\{\infty\} \cup \theta \mid \theta^c = E \setminus \theta \text{ es compacto en } E\}$$

(i) Verifiquemos que $\hat{\tau}$ es topología.

$\cdot \downarrow \emptyset, \hat{E} \in \hat{\tau}$: pues $\emptyset$ es cpto.

$\cdot \downarrow U_1 \cap U_2$: trivial si ambos $\in \tau$

$$(\hat{E} \setminus C_1) \cap (\hat{E} \setminus C_2) = \hat{E} \setminus (C_1 \cup C_2) \checkmark$$

$$(\hat{E} \setminus C_1) \cap U_2^{\infty} = (E \setminus C_1) \cap U_2 \checkmark$$

$\cdot \downarrow \bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = U \in \tau$ si todos $\in \tau$

$$\bigcup_{\alpha} (\hat{E} \setminus C_{\alpha}) = \hat{E} \setminus \left(\bigcap_{\alpha} C_{\alpha} \right) = \hat{E} \setminus C \quad \text{Cpto}$$

$$\left(\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \right) \cup \left(\bigcup_{\beta} (\hat{E} \setminus C_{\beta}) \right) = U^{\infty} \cup (\hat{E} \setminus C) \in \hat{\tau}$$

(i) $\hat{E}$ es cpto.: Sea $\{\theta_n\}_n$ rec. abto de $\hat{E}$

Pero $\forall n \quad \theta_n = U_n \in \tau \vee \theta_n = \hat{E} \setminus C_n$ Cpto de E

Sea $\tilde{N}$ tox $\theta_n = \hat{E} \setminus C_n$ (existe pues es un recubrimiento)

Ahora al qto. $\{\theta_n \mid \{\infty\}\}_n \subseteq \tau$ recubre E y en particular

recubre $C_{\tilde{N}}$. Con lo cual $\exists \{\theta_{n_i} \mid \{\infty\}\}_{i=1}^n$ subrec. de $C_{\tilde{N}}$

$\theta_{\tilde{N}} \cup \{\theta_{n_i}\}_{i=1}^n$ es un subrec. de $\hat{E}$.

(i) Homeomorfismo: $i: E \rightarrow \hat{E}$ es biyectiva def. entre E y $i(E) = \hat{E} \setminus \{\infty\}$

yes Homeomorfismo, pues $\hat{\tau}|_E = \tau|_{i(E)} = \tau$

(i) Densidad: Basta ver que $\infty \in \overline{E}$

Sea U vec. abierta de $\infty \Rightarrow U = \hat{E} \setminus C$ Cpto.

Como E no es compacto $C \not\subseteq E$. $\therefore \exists x \in U \setminus (C \cup \{\infty\})$

ie: $\exists x \in E$ tox $x \in U //$

(i) $\hat{E}$ es Hausdorff:

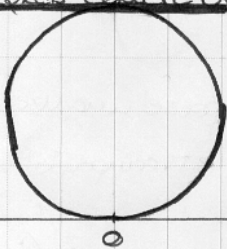
Para el caso $x, y \in E$ ya sabemos hacerlo ($\hat{\tau} \supseteq \tau$).

Sep. que queremos separar $x \in E$ de ∞ . Entonces (E local% cpto.)

$\exists V \in \mathcal{N}_x$ tox $\bar{V}$ es compacto. Entonces. V y $\{\infty\} \cup \bar{V}^c$ son una separación

de x e ∞ .

Ejemplos concretos:

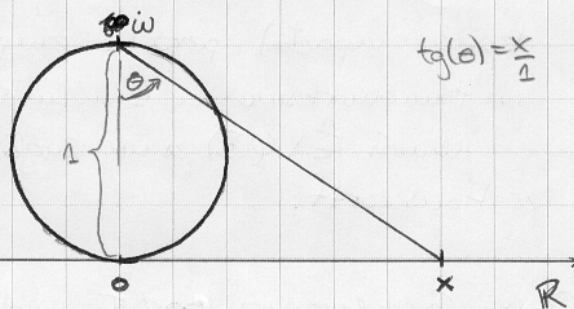
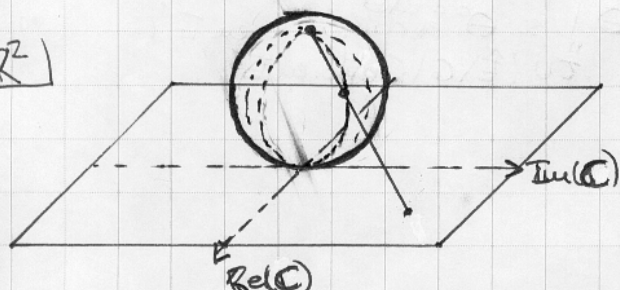
 $\mathbb{R}^1$ 

La compactificación de un pto. de $\mathbb{R}$ es homeomorfa a la circunferencia S^1 .

$$\varphi: \hat{\mathbb{R}} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \{w\}$$

$$\text{si } x \in \mathbb{R} \rightarrow \varphi(x) = \operatorname{tg}(x)$$

$$\text{si } x = \infty \rightarrow \varphi(\infty) = w$$

 $\mathbb{R}^2$ 

La compactificación de un pto. de $\mathbb{C}$ es homeomorfa a S^2 (la esfera de Riemann) a través de la proyección estereográfica.

Tarea: Estudiar la compactificación de 2 pto. de $\mathbb{R}$ ($\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$) y su similitud con $[1, 2]$.

 $\mathbb{R}$ 