

Apuntes de Análisis — Teorema de Tikhonov

R. COMINETTI (DIM, U. DE CHILE)

Teorema 0.1 $(\prod_{i \in I} X_i, \bigotimes_{i \in I} \mathcal{T}_i)$ es compacto ssi $(X_i, \mathcal{T}_i)$ es compacto para todo $i \in I$.

Demostración. Denotemos $X = \prod_{i \in I} X_i$ y $\mathcal{T} = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{T}_i$.

($\Rightarrow$) Si $(X, \mathcal{T})$ es compacto entonces $X_i = \pi_i(X)$ también lo es pues la proyección π_i es continua.

($\Leftarrow$) Procedamos por contradicción suponiendo que $(X, \mathcal{T})$ no es compacto y denotemos por $\mathcal{A}$ la familia de todos los recubrimientos abiertos de X que no tienen subrecubrimiento finito.

Etapas 1. Existe $\mathcal{R}^* \in \mathcal{A}$ maximal en el sentido de la inclusión.

Ello es consecuencia del Lema de Zorn y del hecho que toda cadena $\{\mathcal{R}^\mu : \mu \in M\} \subseteq \mathcal{A}$ admite una cota superior $\mathcal{R} = \cup_{\mu \in M} \mathcal{R}^\mu$. Notar que $\mathcal{R} \in \mathcal{A}$ pues toda subfamilia finita $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{R}$ está contenida en algún $\mathcal{R}^\mu$ y como $\mathcal{R}^\mu \in \mathcal{A}$ resulta que $\mathcal{F}$ no puede cubrir X .

Etapas 2. Existe $x_i^* \in X_i$ tal que toda vecindad abierta V de x_i^* satisface $\pi_i^{-1}(V) \notin \mathcal{R}^*$.

De lo contrario cada $x_i \in X_i$ tendría una vecindad abierta V_{x_i} con $\pi_i^{-1}(V_{x_i}) \in \mathcal{R}^*$, y puesto que $(X_i, \mathcal{T}_i)$ es compacto podríamos encontrar $x_i^1, \dots, x_i^n$ de modo tal que $V_{x_i^1}, \dots, V_{x_i^n}$ recubra X_i , con lo cual $\pi_i^{-1}(V_{x_i^1}), \dots, \pi_i^{-1}(V_{x_i^n})$ sería un subrecubrimiento finito de $\mathcal{R}^*$ contradiciendo $\mathcal{R}^* \in \mathcal{A}$.

Etapas 3. $\mathcal{R}^*$ admite un subrecubrimiento finito ...contradicción!

Sea $x^* = (x_i^*)_{i \in I}$ y fijemos $R^* \in \mathcal{R}^*$ con $x^* \in R^*$. Por definición de la topología producto existe $F \subseteq I$ finito y vecindades abiertas V_i de x_i^* tales que $\prod_{i \in F} V_i \times \prod_{i \notin F} X_i \subseteq R^*$. Dado que $\pi_i^{-1}(V_i) \notin \mathcal{R}^*$ y como $\mathcal{R}^*$ es maximal existe una subfamilia finita $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{R}^*$ tal que $\mathcal{F}_i \cup \{\pi_i^{-1}(V_i)\}$ recubre X , de donde se sigue que la unión $\cup_{i \in F} \mathcal{F}_i$ es una familia finita $\{R_1, \dots, R_n\} \subseteq \mathcal{R}^*$ tal que

$$[R_1 \cup \dots \cup R_n]^c \subseteq \bigcap_{i \in F} \pi_i^{-1}(V_i) = \prod_{i \in F} V_i \times \prod_{i \notin F} X_i \subseteq R^*$$

con lo cual $\{R^*, R_1, \dots, R_n\} \subseteq \mathcal{R}^*$ resulta ser un subrecubrimiento finito. ■