MA38B Análisis. Semestre 2007-02
Profesor: Roberto Cominetti **Auxiliares:** Cristóbal Guzmán y Felipe Olmos

Pauta Control 1

1» de Septiembre de 2007

P2.- a) Probemos que $\delta(\mathcal{X}) = [0,1]$. Sea $r \in [0,1]$,y estudiemos la situación por casos.
Si $r = 0$, la suceción $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definida por $x_k = 2^k$ claramente es tal que $x \in \mathcal{X}$ y $\delta((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) = 0$.
Si $r \in (0,1]$ consideremos la sucesión $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$x_k = \left\lfloor \frac{k}{r} \right\rfloor$$

Donde $\lfloor\cdot\rfloor$ denota función la parte entera. Entonces (dado que $\frac{1}{r} > 1$) es claro que $x \in \mathcal{X}$. Además, como x es monótona, se tiene que:

$$|\{k \in \mathbb{N} : x_k \leq n\}| = \max\{k \in \mathbb{N} : x_k \leq n\}$$

Usando lo anterior, calculemos la densidad de x:

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \in \mathbb{N} : x_k \leq n\}| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \max\{k \in \mathbb{N} : \left\lfloor \frac{k}{r} \right\rfloor \leq n\}$$

Pero$\left\lfloor \frac{k}{r} \right\rfloor \leq n \Leftrightarrow \frac{k}{r} \leq n+1$, con lo cual deducimos que el máximo vale $k = \lfloor (n+1)r \rfloor$ y esto permite deducir:

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \lfloor (n+1)r \rfloor = r \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nr} \lfloor (n+1)r \rfloor}_{\to 1} = r$$

Para calcular $|\mathcal{X}|$, notemos que con lo anterior ya probamos que $|\mathcal{X}| \geq c$, pues encontramos una cantidad no numerable de elementos distintos de $\mathcal{X}$. Pero como además $\mathcal{X} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = c$ se concluye que $|\mathcal{X}| = c$.

b) Probemos que $1/(1 + k(x,y)) = \rho(x,y)$ es una ultramétrica. Para esto, notamos que las 2 primeras propiedades de métrica son triviales; y para la tercera propiedad (ultramétrica), sean $x, y, z \in \mathcal{X}$:
Si $x = y$ es obvio que: $0 = \rho(x,y) \leq \max\{\rho(x,z), \rho(z,y)\}$
Si $x \neq y$, entonces si k es el primer término donde x e y difieren:

$$x_k \neq z_k \ \vee \ y_k \neq z_k \quad \Rightarrow \text{ el primer término donde } x \text{ y } z \text{ difieren o } x \text{ e } y \text{ difieren es menor o igual que } k$$

Con lo cual $\rho(x,y) \leq \max\{\rho(x,z), \rho(z,y)\}$.
Ahora es fácil ver que $d(\cdot,\cdot)$ es métrica:

$$d(x,y) = |\delta(x) - \delta(y)| + \rho(x,y) \leq |\delta(x) - \delta(z)| + |\delta(z) - \delta(y)| + \max\{\rho(x,z), \rho(z,y)\}$$

$$\leq |\delta(x) - \delta(z)| + |\delta(z) - \delta(y)| + \rho(x,z) + \rho(z,y) = d(x,z) + d(z,y)$$

Para calcular el diámetro de $\mathcal{X}$ notamos que $im(d) \subseteq [0,2]$, pues ambas funciones las podemos acotar por 1. Es fácil ver también que las sucesiones $x = id$ e $y = (2^k+1)_{k\in\mathbb{N}}$ están a distancia 2. Luego $diam(\mathcal{X}) = 2$.

Parte I c) Sea $U \neq \emptyset$ abierto de $\mathcal{X}$ e $y \in U$, construiremos una bola que contenga a y y esté contenida en U. Sin pérdida de generalidad $U = \left(\prod_{k \in \mathbb{N}} U_k\right) \cap \mathcal{X}$ con $U_k \subseteq \mathbb{N}\ \forall k \in J$, J finito y para el resto $U_k = \mathbb{N}$.
Forzaremos a que todas las coordenadas de esta bola coincidan con y hasta $(\sup J) + 1$ (así nos aseguramos de no escapar de U_k. Esto es posible utilizando $\varepsilon < \frac{1}{(\sup J)+1}$. Luego:

$$y \in B(y, \varepsilon) \subseteq U$$

Para ver que es estrictamente más fina, probaremos que dada $B = B(x, \varepsilon)$, con ε suficientemente pequeño y x apropiado, no existe abierto en la topología τ_d que se pueda incluir en B (notar que con esto, no es posible construir B como unión de abiertos de τ_d y por ende, B no es abierto en τ_d). Notemos que:

$$y \in B \Leftrightarrow \rho(x, y) + |\delta(x) + \delta(y)| < \varepsilon$$

Sea ε tal que $\frac{1}{k-1} \leq \varepsilon < \frac{1}{k}$. Esto implica que x e y coinciden en sus k primeras coordenadas. y además $|\delta(x) - \delta(y)| < \varepsilon$. Pero esto no es posible de hacer en un cilindro que a partir de cierto punto:

$$\pi_n(U) = \mathbb{N}$$

Pues podemos escoger sucesiones en $\mathcal{X}$ que tengan densidad arbitrariamente pequeña (por ejemplo 0), y en particular, para un x con densidad mayor que 0 y ε pequeño, los cilindros no quedan contenidos en B.

d) Por propiedad de la topología producto: $\tilde{\pi}_N : (\mathcal{X}, \tau_p) \to (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ (proyección con la topología producto) es continua. Entonces, $\pi_N : (\mathcal{X}, \tau_d) \to (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ es la composición de la identidad $id : (\mathcal{X}, \tau_d) \to (\mathcal{X}, \tau_p)$ (continua por la parte anterior) con $\tilde{\pi}_n$, con lo cual se concluye que es continua.

e) Sean $x \neq y$ en $\mathcal{X}$, y sea k la primera coordenada donde x e y difieren. Entonces, por la parte anterior $\pi_k^{-1}(\{x_k\})$ y $\pi_k^{-1}(\{x_k\}^C)$ son abiertos en $\mathcal{X}$ que lo particionan y además separan a x e y.

Parte II f) Sea $x \in \mathcal{X}$ y consideramos $B = B(x, \varepsilon)$.Sea $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ definida por:

$$y_k = x_k \ \text{ para } k \leq n_0, \quad y_k = M + x_k \ \text{ para } k > n_0$$

Con $M \in \mathbb{N}$, $M \neq 0$ Y n_0 tal que: $\frac{1}{n_0+1} < \varepsilon$. Entonces:

$$\delta(y) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} |\{k \in \mathbb{N} : y_k \leq n\}| = \lim_{n \to \infty} \frac{|\{k \in \mathbb{N} : x_k \leq n\}| - M}{n} = \delta(x)$$

(la igualdad entre los límites se puede probar por sandwich)
Además:

$$d(x, y) = \frac{1}{n_0 + 1} + \underbrace{|\delta(x) - \delta(y)|}_{=0} < \varepsilon$$

Así, $y \in B$, con lo cual se concluye que x no es pto. aislado.

g) Usando las sucesiones $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de la parte anterior $\forall M \in \mathbb{N},\ M \neq 0$, notamos que a partir de cierto k las proyecciones $\pi_k(B)$ contienen un intervalo infinito.

h) El conjunto de secuencias finitas de naturales es numerable, así como el conjunto de sucesiones usadas en la parte a) con $r \in \mathbb{Q}$. En consecuencia, el conjunto de sucesiones estrictamente crecientes, que a partir de cierto punto son como en a) es numerable. Probemos que es denso.
Sea $x \in \mathcal{X}$ y $\varepsilon > 0$, luego existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0+1} < \frac{\varepsilon}{2}$, además podemos aproximar con $r \in \mathbb{Q}$ la densidad de x con un error $|\delta(x) - r| < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, la sucesión que hasta n_0 es igual al x y después es como en a) está en $B(X, \varepsilon)$. Luego, el conjunto es denso.