MA38B Análisis. Semestre 2007-02
Profesor: Roberto Cominetti **Auxiliares:** Cristóbal Guzmán y Felipe Olmos

Clase Auxiliar 5

28 de Agosto de 2007

P1.- *Espacios de Tychonoff o Completamente Regulares*

Def.: Un espacio topológico X se dice de Tychonoff (Ty) ssi es Hausdorff y

$$(\forall x \in X)(\forall F \subset X \text{ cerrado})(x \notin F)\, \exists f : X \to [0,1]\, f(x) = 1,\ f(y) = 0\, (\forall y \in F)$$

1. Sea X un espacio topológico Hausdorff y $\mathcal{B}$ una base de abiertos de X. Probar que:
$$X \text{ es Ty} \Longleftrightarrow (\forall x \in X)(\forall V \in \mathcal{B})(x \in V)\, \exists f : X \to [0,1]\, f(x) = 1,\ f(y) = 0\, (\forall y \in V^C)$$
2. Probar que si X es e.t. Ty e Y es subespacio topológico de X, entonces Y es Ty.
3. Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de e.t. no vacíos. Pruebe que:
$$X = \prod_{i\in I} X_i \text{ es Ty} \Longleftrightarrow X_i \text{ es Ty } (\forall i \in I)$$
4. Pruebe que $\mathbb{R}$ es Tychonoff (Hint: recuerde la demostración de: Todo espacio métrico es T_4).
5. Sea I un conjunto de índices. Pruebe que $\prod_{i\in I}[0,1] = [0,1]^I$ (conocido como el *I-cubo*) es Ty.
6. Sea X Ty y $\mathcal{C} = \{f : X \to [0,1] | f \text{ es continua}\}$, consideramos la *evaluación de* X como la función $\varphi : X \to [0,1]^{\mathcal{C}}$ tal que:
$$\varphi(x) = (f(x))_{f\in\mathcal{C}} \in \varphi(X) \subseteq [0,1]^{\mathcal{C}}$$
y definimos $\tilde{\varphi}$ como la restricción de φ a $\varphi(X)$ (en el espacio de llegada).
Pruebe que φ es continua y abierta.
7. Muestre que $\tilde{\varphi} : X \longrightarrow \varphi(X)$ es un homeomorfismo y concluya el siguiente resultado:
$$X \text{ es Tychonoff} \Longleftrightarrow X \text{ es homeomorfo a un subespacio de } [0,1]^{\mathcal{C}} \text{ con } \mathcal{C} = \{f : X \to [0,1] | f \text{ es continua}\}$$
8. (Para cuando sepan compacidad) Probar que X es compacto ssi $\varphi(X)$ es cerrado en $[0,1]^{\mathcal{C}}$.

P2.- *El cubo de Hilbert*

Ver Parte 3, Control 1, año 2002.

P3.- *Operador Cerradura de Kuratowski*

Ver P3, Tarea 2 del Prof. Felipe Álvarez.