<u>Valuación p-ádica</u>: Sea $p \in \mathbb{N}$ un primo fijo

Definimos sobre $\mathbb{Q}$ la <u>valuación p-ádica</u> como sigue:

$$|x|_p = \begin{cases} \left(\frac{1}{p}\right)^{n_x} & x \neq 0 \\ 0 . & x = 0 \end{cases}$$

donde n es tal que $x = p^{n_x}\left(\frac{a_x}{b_x}\right)$ con a_x y $b_x \in \mathbb{Z}$ no divisibles por p

• (Notar que para cada x, n_x es único)

<u>Prop</u>: $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ satisface

1) $|x|_p \geq 0$

2) $|x|_p = 0 \iff x = 0$

3) $|xy|_p = |x|_p |y|_p$

4) $|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$

<u>Dem</u> 1) es claro ✓

2) $\boxed{\Rightarrow}$ Si $|x|_p = 0$ y $x \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{p}\right)^{n_x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{p} = 0 \rightarrow\times\leftarrow$

3) Sea $x = p^{n_x}\left(\frac{a_x}{b_x}\right)$ e $y = p^{n_y}\left(\frac{a_y}{b_y}\right)$

$$\Rightarrow xy = p^{n_x+n_y}\left(\frac{a_x a_y}{b_x b_y}\right)$$

Como a_x y a_y no son divisibles por p tampoco $a_x a_y$

Lo mismo para $b_x b_y$

Luego $n = n_x + n_y$ <u>es</u> el exponente que hace que

$$xy = p^n \left(\frac{a}{b}\right) \quad \text{con } a \text{ y } b \in \mathbb{Z} \text{ no divisibles por } p. \qquad \begin{pmatrix} a = a_x a_y \\ b = b_x b_y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad |xy|_p = \left(\frac{1}{p}\right)^n = \left(\frac{1}{p}\right)^{n_x + n_y} = |x|_p |y|_p$$

v) Consideremos la misma factorización que en (3) para x e y y supongamos sin pérdida de generalidad que $n_x < n_y$

Entonces: (Si son $=$ entonces $|x+y|_p = n_x = n_y$)

$$x + y = p^{n_x} \frac{a_x}{b_x} + p^{n_y} \frac{a_y}{b_y}$$

$$= p^{n_x} \left(\frac{a_x}{b_x} + \frac{p^{n_y - n_x} a_y}{b_y} \right) = p^{n_x} \left(\frac{a_x b_y + p^{n_y - n_x} a_y b_x}{b_x b_y} \right)$$

Claramente $b \overset{(def)}{:=} b_x b_y$ no es divisible por p

Como $n_y - n_x \geq 0$ (por el supuesto) $\Rightarrow p^{n_y - n_x} \in \mathbb{Z}$

Luego $a \overset{(def)}{:=} a_x b_y + p^{n_y - n_x} a_y b_x \in \mathbb{Z}$ y <u>no</u> es divisible por p

pues entonces $a_x b_y$ sería divisible por p lo cual no puede ser

$\Rightarrow$ La descomposición de $x+y$ es $p^{n_x}\left(\frac{a}{b}\right)$

y por lo tanto

$$|x+y|_p = \left(\frac{1}{p}\right)^{n_x} = \max\left\{\left(\frac{1}{p}\right)^{n_x}, \left(\frac{1}{p}\right)^{n_y}\right\} = \max\{|x|_p, |y|_p\}$$

pues si $n_x < n_y \Rightarrow \left(\frac{1}{p}\right)^{n_y} < \left(\frac{1}{p}\right)^{n_x}$

y tenemos entonces no solo la desigualdad sino que una igualdad ultramétrica

Cor: Para $x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow d(x,y) = |x-y|_p$ es ultramétrica $\boxtimes$

Dem: Directo de (1) (2) y (4)