ANALISIS I — CONTROL 1 — 2001

Para cada conjunto A consideramos el espacio producto $[0,1]^A = \{f : A \to [0,1]\}$ con la topología producto, esto es, la topología de la convergencia puntual. Si (X, τ) es un espacio topológico, $C(X) \subset [0,1]^X$ denota el espacio de funciones continuas de X en $[0,1]$. En $C(X)$ consideramos la topología traza (de la topología producto).

DEFINICIÓN. *Un espacio topológico (X, τ) se dice de Tikhonov si para todo $x \in X$ se tiene que $\{x\}$ es cerrado y para cada $V \in \mathcal{N}_x$ existe $h \in C(X)$ con $h(x) = 0$ y $h(y) = 1$ para $y \notin V$.*

Parte I.

(a) Probar que $c^c = 2^c$ y que $|C(\mathbb{N})| = c$.
Recuerdo: Si $|A| = \alpha$ y $|B| = \beta$ entonces $\beta^\alpha = |\{f : A \to B\}|$. Además $|\mathcal{P}(A)| = 2^\alpha$.

(b) Probar que si $|A| = |B|$ entonces $[0,1]^A$ y $[0,1]^B$ son homeomorfos. Deducir que $[0,1]^{C(\mathbb{N})}$ es separable.

(c) Probar que todo espacio Hausdorff compacto es de Tikhonov.

(d) Sean A, B conjuntos y $f : A \to B$. Definimos $f^* : [0,1]^B \to [0,1]^A$ mediante $f(u) = u \circ f$ para todo $u \in [0,1]^B$. Probar que f^* es continua.

Parte II. En lo que sigue supondremos que (X, τ) es un espacio de Tikhonov. Llamamos *"evaluación de X"* a la función $e : X \to [0,1]^{C(X)}$ definida por $e(x)(f) = f(x)$ para $f \in C(X)$ y $x \in X$.

(e) Probar que $e : X \to e(X)$ es un homeomorfismo.

(f) Probar que (X, τ) es compacto si y solo si $e(X)$ es cerrado en $[0,1]^{C(X)}$.

Parte III. Llamamos compactificación de Stone-Čech de X al espacio $\beta(X) = \overline{e(X)}$ (cerradura para la topología producto en $[0,1]^{C(X)}$).

(g) Probar que $\beta(X)$ es compacto.

(h) Sea (Y, σ) un espacio de Hausdorff compacto y sea $F : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ contínua. Probar que existe una única función contínua $\hat{F} : \beta(X) \to Y$ tal que $F = \hat{F} \circ e$.
Indicación: Defina $F^* : C(Y) \to C(X)$ y $F^{**} : [0,1]^{C(X)} \to [0,1]^{C(Y)}$ mediante $F^*(w) = w \circ F$ y $F^{**}(u) = u \circ F^*$. Compruebe que $F^{**} \circ e = g \circ F$ donde g es la evaluación de Y.

Parte IV. Sea $X = \mathbb{N}$ con la topología discreta. Usando todo lo anterior se puede ver que la compactificación Stone-Čech $\beta(\mathbb{N})$ es "mucho más grande" que $\mathbb{N}$.

(i) Probar que $|\beta(\mathbb{N})| = 2^c$.
Indicación: Sea D un denso numerable en $[0,1]^{C(\mathbb{N})}$ y $F : \mathbb{N} \to [0,1]^{C(\mathbb{N})}$ tal que $F(\mathbb{N}) = D$. Pruebe que $\hat{F} : \beta(\mathbb{N}) \to [0,1]^{C(\mathbb{N})}$ existe y es sobreyectiva.