

Examen MA38B

Profesor de cátedra: Carlos Conca.

Profesores auxiliares: Roberto Cortez, Cristian Figueroa, Diego Morán.

En todo el examen H es un espacio de Hilbert complejo de producto escalar (\cdot, \cdot) y norma inducida $\|\cdot\|$. Denote $\mathcal{L}(H)$ el espacio vectorial de las funciones lineales continuas de H en H .

Problema 1. Sea $u \in \mathcal{L}(H)$.

- (a) Mostrar que $\forall y \in H$ la función $H \ni x \mapsto (u(x), y) \in \mathbb{C}$ es lineal y continua. Deduzca de un teorema conocido que $\exists! z_y \in H$ tal que $(u(x), y) = (x, z_y) \forall x \in H$.
- (b) Mostrar que la aplicación $u^* : H \rightarrow H$ dada por $y \mapsto u^*(y) = z_y$ es lineal, continua y que $\|u\| = \|u^*\|$.

Llamamos a u^* el *operador adjunto* de u . De acuerdo a estas notaciones, se tiene

$$(u(x), y) = (x, u^*(y)) \quad \forall x, y \in H.$$

- (c) Demuestre que la aplicación $\Phi : \mathcal{L}(H) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ definida por $u \mapsto \Phi(u) = u^*$ es un homeomorfismo de espacios normados. Caracterice Φ^{-1} , calcule $\|\Phi\|$ y pruebe que $\Phi(u \circ v) = \Phi(v) \circ \Phi(u) \quad \forall u, v \in \mathcal{L}(H)$.

Problema 2. A los puntos fijos de la aplicación Φ definida en el problema anterior los llamaremos *operadores auto-adjuntos*.

- (a) Indique por un ejemplo simple la existencia de operadores auto-adjuntos.
- (b) Pruebe que si u es auto-adjunto entonces $v^* \circ u \circ v$ también lo es, $\forall v \in \mathcal{L}(H)$.
- (c) Demuestre que si u es auto-adjunto, entonces $\forall x, y \in H$ se tiene

$$(u(x), y) = (u(x+y), x+y) - (u(x-y), x-y) + i(u(x+iy), x+iy) - i(u(x-iy), x-iy).$$

- (d) Demuestre que si u es auto-adjunto entonces $(u(x), x) = 0 \quad \forall x \in H$ si y sólo si $u = 0$.
- (e) Usando (c) y (d), pruebe que u es auto-adjunto si y sólo si $(u(x), x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H$.

Problema 3. Recuerde que si V es un s.e.v. cerrado de H entonces $\forall x \in H \exists! y \in V$ proyección de x sobre V . Defina la función $p_V : H \rightarrow V$ tal que a $x \in H$ le asocia dicha proyección.

- (a) Demuestre que p_V es lineal, continua y que $p_V \circ p_V = p_V$. Calcule $\|p_V\|$ y pruebe que p_V es un operador auto-adjunto.
- (b) Inversamente, muestre que si u es un operador auto-adjunto tal que $u \circ u = u$, entonces u es el operador de proyección sobre $V = u(H)$.
- (c) Pruebe que $\text{id}_H - p_V$ es una proyección sobre un s.e.v. W . Caracterice W .
- (d) Sean V y W dos s.e.v.'s cerrados de H . Pruebe que $V \perp W$ si y sólo si $p_V \circ p_W = p_W \circ p_V = 0$.

Tiempo: 4:00 horas.