

Trabajo dirigido #7 MA38B

Profesor de cátedra: Carlos Conca.

Profesores auxiliares: Roberto Cortez, Cristian Figueroa, Diego Morán.

Problema 1.

- (a) Sea $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$. Demostrar que f es uniformemente continua si y sólo si para cualquier par de sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} d'(f(x_n), f(y_n)) = 0$$

- (b) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua. Para $a \in \mathbb{R}$ se define $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f_a(x) = f(x - a)$. Demostrar que $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ es equicontinuo.

Problema 2. Sea (E, d) espacio métrico compacto. Sea \mathcal{I} el conjunto de todas las isometrías de E en E (para este ejercicio, una isometría es una aplicación que preserva distancias, no necesariamente biyectiva).

- (a) Sea $a \in E$, $f \in \mathcal{I}$. Demuestre que la sucesión $(f^n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ (donde f^n denota la composición de f consigo misma n veces) tiene a a como valor de adherencia. Deduzca de esto que f es biyectiva y que \mathcal{I} es un subgrupo del grupo de las biyecciones de E (con la operación composición).
- (b) Demuestre que \mathcal{I} es cerrado en $\mathcal{C}^0(E, E)$.
- (c) Demuestre que \mathcal{I} es compacto.

Problema 3. Sea (X, d) espacio métrico compacto, $E \subset \mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$. Se dice que E es *uniformemente acotada* si existe $M > 0$ tal que $\forall f \in E, \forall x \in X$ se tiene que $|f(x)| \leq M$. Demostrar que \overline{E} es compacto si y sólo si E es equicontinua y uniformemente acotada.