

Trabajo dirigido #4 MA38B

Profesor de cátedra: Carlos Conca.

Profesores auxiliares: Roberto Cortez, Cristian Figueroa, Diego Morán.

Problema 1. Sea E un espacio topológico y F un espacio topológico separado. Considere $p_E : E \times F \rightarrow E$ la proyección de $E \times F$ en E .

- (a) Muestre que p_E es abierta.
- (b) Muestre con un ejemplo que en general p_E no es cerrada.
- (c) Muestre que si F es compacto, la aplicación p_E es cerrada.
- (d) Considere una función $f : E \rightarrow F$. Pruebe que si F es compacto y el grafo de f es cerrado, entonces f es continua.

Problema 2. Sea E un espacio topológico separado.

- (a) Sea $K \subset E$ un compacto no conexo. Muestre que existen abiertos disjuntos U y V tales que $K \subset U \cup V$, $K \cap U \neq \emptyset$, $K \cap V \neq \emptyset$.

Sea $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de compactos no vacíos en E , es decir, $K_n \subset E$ compacto $\forall n \in \mathbb{N}$ y $K_{n+1} \subset K_n \forall n \in \mathbb{N}$. Considere $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$.

- (b) Muestre que K es un compacto no vacío en E , y que si $V \supset K$ es un abierto entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $V \supset K_n$.
- (c) Suponga que además K_n es conexo $\forall n \in \mathbb{N}$. Muestre que K es conexo.
- (d) Muestre que la hipótesis de compacidad es necesaria para el resultado anterior. Es decir, encuentre una sucesión decreciente de partes cerradas y conexas tal que la intersección no es conexa. *Indicación:* busque el contraejemplo en \mathbb{R}^2 .