

## Control 3 MA38B

Profesor de cátedra: Carlos Conca.

Profesores auxiliares: Roberto Cortez, Cristian Figueroa, Diego Morán.

**Problema 1 (35 %).** Para  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $f_n : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$  la función  $f_n(x) = (\sin x)^n$ .

- (a) Demuestre que la sucesión de funciones  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tiene un límite puntual sobre  $[0, \pi/2]$ . Calcúlelo. ¿Converge uniformemente sobre  $[0, \pi/2]$ ?
- (b) ¿Converge uniformemente sobre  $[0, \pi/2]$ ? ¿Converge uniformemente sobre cada parte compacta de  $[0, \pi/2]$ ?

Sea  $E$  el e.v. de las funciones continuas de  $[0, \pi/2]$  en  $\mathbb{R}$  con la norma de la convergencia uniforme, esto es,  $E = \mathcal{C}^0([0, \pi/2]; \mathbb{R})$ . Sea  $A = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

- (c) Demuestre que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de puntos de  $E$  que no tiene valores de adherencia. Concluya que  $A$  es un subconjunto no compacto de  $E$ .
- (d) Demuestre que  $A$  es cerrado en  $E$ . *Indicación:* pruebe que en un espacio métrico cualquiera la adherencia del conjunto de puntos de una sucesión está conformada por los puntos mismos de la sucesión y por sus puntos de acumulación.
- (e) ¿Es  $A$  acotado? ¿Es  $A$  equicontinuo?
- (f) Demuestre que en  $E$  la bola unidad cerrada  $\overline{B}(0; 1)$  no es compacta. Deduzca de esto que  $E$  no es localmente compacto.

**Problema 2 (35 %).**

- (a) Se dice que una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es *nula al infinito* si  $\forall \epsilon > 0$  existe un compacto  $K_\epsilon \subset \mathbb{R}$  tal que  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus K_\epsilon$  se tiene  $|f(x)| < \epsilon$ . Sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión creciente de funciones continuas y nulas al infinito. Demuestre que si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge puntualmente hacia  $f$  continua y nula al infinito, entonces la convergencia es uniforme.
- (b) Sea  $I = [a, b]$  un intervalo compacto de  $\mathbb{R}$ . Sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones crecientes de  $I$  en  $\mathbb{R}$  que converge puntualmente sobre  $I$  a una función  $f$  continua. Demuestre que  $f$  es también creciente y que la convergencia es uniforme. *Indicación:* para  $\epsilon > 0$  pruebe la existencia de una partición  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m+1} = b$  tal que  $f(t_{i+1}) - f(t_i) < \epsilon/2$  para  $i = 0, \dots, m$ . Use esto para probar que a partir de un cierto  $n_0$  se tiene que  $-\epsilon < f_n(x) - f(x) < \epsilon \forall x \in [a, b]$  y concluya.

**Problema 3 (30 %).** Sean  $X, Y$  e.v.n.'s y  $L : X \rightarrow Y$  una aplicación lineal y continua. Definimos  $L^* : Y' \rightarrow X'$ , el operador *adjunto* de  $L$ , como  $(L^*g)(x) = g(Lx) \forall g \in Y', \forall x \in X$ .

- (a) Pruebe que  $L^*$  es lineal continua y que  $\|L^*\| \leq \|L\|$ .
- (b) Pruebe que  $\|L^*\| = \|L\|$ . *Indicación:* dado  $\epsilon > 0$  arbitrario, pruebe que  $\|L^*\| \geq \|L\| - \epsilon$ . Para esto, puede ser útil probar que dado  $x_0 \in X$  existe  $g \in Y'$  tal que  $\|g\| = 1$  y  $g(Lx_0) = \|Lx_0\|$ .

**Tiempo: 4:30 horas.**