

## Examen Recuperativo MA38B

Profesor de cátedra: Carlos Conca.

Profesores auxiliares: Roberto Cortez, Cristian Figueroa, Diego Morán.

**Problema 1.** Sean  $X, Y$  conjuntos no vacíos,  $\tilde{\tau}$  una topología sobre  $Y$ , y  $\mathcal{F}$  una familia de funciones de  $X$  en  $Y$ .

(a) Considere

$$\Theta = \{\theta : \theta \text{ es topología sobre } X \text{ que hace continua a toda } f \in \mathcal{F}\}.$$

Pruebe que  $\Theta \neq \emptyset$ . Pruebe que  $\tau = \bigcap_{\theta \in \Theta} \theta$  es una topología y que es la menos fina que hace continuas a todas las funciones de  $\mathcal{F}$ , es decir, pruebe que  $\tau \in \Theta$  y que  $\tau \leq \theta \forall \theta \in \Theta$ .

A la topología  $\tau$  definida en el punto anterior se le llama *topología engendrada en  $X$  por la familia  $\mathcal{F}$*  y se le denota  $\sigma(X, \mathcal{F})$ .

(b) Considere  $\tau'$  la familia de subconjuntos de  $X$  formada por uniones arbitrarias de intersecciones finitas de conjuntos de la forma  $f^{-1}(V)$ , donde  $f \in \mathcal{F}$  y  $V \in \tilde{\tau}$ , es decir

$$\tau' = \left\{ \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J_i} f_{i,j}^{-1}(V_{i,j}) : \#J_i < \infty, f_{i,j} \in \mathcal{F}, V_{i,j} \in \tilde{\tau}, \forall i \in I, \forall j \in J_i \right\}.$$

Pruebe que  $\tau'$  es una topología sobre  $X$  y que  $\tau' = \sigma(X, \mathcal{F})$ .

En lo que sigue  $X$  es un e.v.n. y  $X'$  su dual topológico. A la topología  $\sigma(X, X')$  (es decir, la topología engendrada en  $X$  por la familia de aplicaciones lineales de  $X$  en  $\mathbb{R}$  que son continuas según la norma) se le llama *topología débil* de  $X$ . A la topología de la norma la llamamos *topología fuerte*. Note que ahora tenemos dos topologías en  $X$ , y que por lo tanto las nociones topológicas, como la continuidad de una función o la compacidad de un conjunto, dependerán de cuál es la topología que se considere; para evitar toda confusión, hablaremos de *continuidad débil* o de que una función es *débilmente continua* en el caso de la topología débil, mientras que cuando se considere la topología fuerte hablaremos de *continuidad fuerte* o que una función es *fuertemente continua*.

(c) Pruebe que  $\sigma(X, X')$  es menos fina que la topología de la norma. Concluya que toda función  $f : X \rightarrow Y$  débilmente continua es fuertemente continua y que todo conjunto  $K \subset X$  fuertemente compacto es débilmente compacto.

- (d) Sea  $x \in X$ . Dados  $f \in X'$ ,  $\epsilon > 0$ , definimos el conjunto

$$U_{f,\epsilon} = \{y \in X : |f(x) - f(y)| < \epsilon\}.$$

Pruebe que  $U_{f,\epsilon}$  es un abierto débil. Dado  $U \in \sigma(X, X')$  que contenga a  $x$ , pruebe que existen  $f_1, \dots, f_n \in X'$ ,  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n > 0$  tales que  $\bigcap_{i=1}^n U_{f_i, \epsilon_i} \subset U$ . Concluya que las intersecciones finitas de conjuntos de la forma  $U_{f,\epsilon}$  forman una base de vecindades de  $x$  para la topología débil.

- (e) Sea  $(x_n)$  una sucesión en  $X$  y  $x \in X$ . Pruebe que  $(x_n)$  converge débilmente a  $x$  si y sólo si  $\forall f \in X'$  se tiene que  $f(x_n)$  converge a  $f(x)$  en  $\mathbb{R}$ .

**Problema 2.** Sean  $E, F$  e.v.n.'s, con  $F$  de Banach. Decimos que un operador lineal  $T : E \rightarrow F$  es *compacto* si  $\overline{T(A)}$  es un compacto de  $F$  para todo  $A \subset E$  acotado. Denotamos  $\mathcal{LK}(E, F)$  al conjunto de operadores compactos de  $E$  en  $F$ .

- (a) Dado  $T : E \rightarrow F$  lineal, pruebe que  $T$  es compacto si y sólo si  $\overline{T(B)}$  es compacto, donde  $B$  es la bola unitaria cerrada de  $E$ .
- (b) Pruebe que todo operador compacto es continuo. Dé un ejemplo que muestre que el recíproco no es cierto en general. *Indicación:* para el contraejemplo, recuerde que en un e.v.n. de dimensión infinita la bola unitaria cerrada no es compacta.
- (c) Pruebe que  $\mathcal{LK}(E, F)$  es un sub-espacio vectorial de  $\mathcal{L}(E, F)$ .
- (d) Pruebe que  $\mathcal{LK}(E, F)$  es cerrado en  $\mathcal{L}(E, F)$ . *Indicación:* recuerde que como  $F$  es completo,  $\overline{T(B)}$  será compacto si y sólo si para todo  $\epsilon > 0$   $T(B)$  se puede recubrir con un número finito de bolas de radio  $\epsilon$ .
- (e) Pruebe que si  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  y  $\dim(T(E)) < \infty$  entonces  $T \in \mathcal{LK}(E, F)$ . *Indicación:* recuerde que en un e.v.n. de dimensión finita la bola unitaria cerrada es compacta.

**Tiempo: 4 hrs. 30 min.**