

Trabajo dirigido #9 MA38B

Profesor de cátedra: Carlos Conca.

Profesores auxiliares: Roberto Cortez, Cristian Figueroa, Diego Morán.

Problema 1. Sea E un e.v.

- (a) Suponga que E está normado y sea $B = B(0, 1)$ la bola abierta unitaria en E . Demuestre las siguientes propiedades algebraicas sobre B :

1. B es *convexa*: $\forall x, y \in B, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda)y \in B$.
2. B es *equilibrada*: $\forall x \in B, \forall |\lambda| \leq 1, \lambda x \in B$.
3. B es *absorbente*: $\forall x \in E, \exists \alpha > 0, \forall |\lambda| \leq \alpha, \lambda x \in B$.
4. $\forall 0 \neq x \in B, \exists \lambda > 0, \lambda x \notin B$.
5. $\forall x \in B, \exists \lambda > 0, x + \lambda B \subset B$.

- (b) Dado $A \subset E$, se define la aplicación $M_A : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, llamada *funcional de Minkowsky* de A , como

$$M_A(x) = \inf\{\lambda > 0 \mid (1/\lambda)x \in A\},$$

con la convención de que $\inf \emptyset = +\infty$. Suponga que existe $B \subset E$ cumpliendo las cinco propiedades del punto anterior. Pruebe que M_B es una norma sobre E y que la bola unitaria abierta según esta norma es justamente B .

Problema 2. Sea E un e.v.n. y M un s.e.v. cerrado. Considere la aplicación $\|\cdot\| : E/M \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por

$$\|[x]\| = \inf\{\|y\| \mid y \in [x]\}.$$

- (a) Pruebe que $\|\cdot\|$ define una norma sobre E/M .
- (b) Pruebe que si E es Banach, entonces E/M también lo es.
- (c) Pruebe que la aplicación canónica $T : E \rightarrow E/M$ definida por $T(x) = [x]$ es lineal y continua, con $\|T\| \leq 1$. Pruebe que T es abierta.
- (d) Pruebe que si M y E/M son completos, entonces E también lo es.