

## Trabajo dirigido #5 MA38B

Profesor de cátedra: Carlos Conca.

Profesores auxiliares: Roberto Cortez, Cristian Figueroa, Diego Morán.

### Problema 1.

- (a) Sea  $K$  un compacto de un espacio topológico  $E$ . Pruebe que si  $E$  es separado entonces  $K$  es cerrado.
- (b) Sean  $E, F$  espacios topológicos y  $f : E \rightarrow F$  una función continua. Pruebe que si  $E$  es compacto y  $F$  es separado entonces  $f$  es una aplicación cerrada.
- (c) Un espacio topológico  $E$  se dice *normal* si dados  $A, B$  cerrados disjuntos existen  $U, V$  abiertos que los separan, es decir,  $U \supset A, V \supset B$  y  $U, V$  disjuntos. Pruebe que todo espacio topológico compacto y separado es normal.

### Problema 2.

- (a) Sea  $X$  espacio topológico.
  - 1. Sean  $A$  y  $B$  dos cerrados en  $X$  tales que  $A \cup B$  y  $A \cap B$  son conexos. Demuestre que  $A$  y  $B$  son conexos. Dé un ejemplo que muestre que la hipótesis de  $A$  y  $B$  cerrados es necesaria.
  - 2. Sean  $A$  y  $B$  conexos de  $X$  tales que  $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$ . Demuestre que  $A \cup B$  es conexo.
- (b) Demostrar que la imagen por una función continua de un espacio conexo por caminos es un espacio conexo por caminos.
- (c) Sea  $(X_i)_{i \in I}$  una familia de conjuntos conexos por caminos de un espacio topológico  $X$  tal que  $\bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset$ . Pruebe que  $\bigcup_{i \in I} X_i$  es conexo por caminos.
- (d) Demuestre que en  $\mathbb{R}^2$  el conjunto de puntos  $(x, y)$  que tienen al menos una coordenada irracional es conexo.