

Control 2 MA38B

Profesor de cátedra: Carlos Conca.

Profesores auxiliares: Roberto Cortez, Cristian Figueroa, Diego Morán.

Problema 1. Considere en \mathbb{R} la relación de equivalencia \mathcal{R} definida por

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y \vee x, y \in \mathbb{Z}.$$

Sea $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathcal{R}$ la epiyección canónica, i.e., $s(x) = [x] \forall x \in \mathbb{R}$, donde $[x]$ denota la clase de equivalencia de x . Dotemos a \mathbb{R}/\mathcal{R} de la topología cuociente, la cual está definida por

$$U \text{ abierto en } \mathbb{R}/\mathcal{R} \Leftrightarrow s^{-1}(U) \text{ abierto en } \mathbb{R}.$$

- (a) (0.5 ptos.) Para $x \in \mathbb{R}$, explicita $s(x)$ y $s(\{x\})$.
- (b) (1 pto.) Muestre que \mathbb{R} es localmente compacto.
- (c) (1 pto.) Para $A \subset \mathbb{R}$, explicita $s(A)$. *Indicación:* distinga los casos $A \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ y $A \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$.
- (d) (1 pto.) Suponga que $[0]$ posee una vecindad compacta K en \mathbb{R}/\mathcal{R} . Muestre que existe un abierto $U \subset \mathbb{R}/\mathcal{R}$ y un cerrado $F \subset \mathbb{R}$ de la forma

$$F = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n - \epsilon_n, n + \epsilon_n],$$

donde $\epsilon_n > 0$, tales que $s(F) \subset U \subset K$. *Indicación:* para probar que F es cerrado, un buen dibujo de F puede ser de utilidad.

- (e) (1 pto.) Pruebe que $s(F)$ es cerrado en \mathbb{R}/\mathcal{R} . Deduzca que $s(F)$ es compacto.
- * (f) (1 pto.) Mostrar que existe un recubrimiento abierto de $s(F)$ que no tiene subrecubrimiento finito. Puede suponer que $\epsilon_n < 1/2 \forall n \in \mathbb{Z}$.
- (g) (0.5 ptos.) Deduzca que \mathbb{R}/\mathcal{R} no es localmente compacto.

Problema 2.

- (a) (1 pto.) Sea E un conjunto no vacío y $\rho : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$) una función que cumple:
 - (i) $\rho(x, y) = 0 \vee \rho(y, x) = 0 \Leftrightarrow x = y$
 - (ii) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \forall x, y, z \in E$.

Mostrar que la aplicación $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $d(x, y) = \max(\rho(x, y), \rho(y, x))$ es una métrica sobre E (llamada *simetrización* de ρ).

Sea (X, δ) un espacio métrico.

- (b) (1 pto.) Considere $A \subset X$ no vacío y $x \in X$. Mostrar que $\delta(x, A) = 0$ si y sólo si $x \in \overline{A}$.
- (c) (1 pto.) Suponga que $\delta(X) < +\infty$. Sea $E = \{A \subset X \mid A \neq \emptyset, A \text{ cerrado en } X\}$. Para $A, B \in E$ se definen

$$\begin{aligned}\rho(A, B) &= \sup_{x \in A} \delta(x, B) \\ d(A, B) &= \max(\rho(A, B), \rho(B, A)).\end{aligned}$$

Mostrar que d es una métrica sobre E . Verifique que la función $\varphi : (X, \delta) \rightarrow (E, d)$ definida por $\varphi(x) = x \ \forall x \in X$, es una isometría.

Para el resto del problema, considere $X = \mathbb{R}^+$ y las métricas

$$\begin{aligned}\delta(x, y) &= \left| \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \right| \\ \delta'(x, y) &= \min(1, |x - y|).\end{aligned}$$

- (d) (1 pto.) Mostrar que δ y δ' son efectivamente métricas sobre X .
- (e) (1 pto.) Mostrar que las topologías inducidas por δ y δ' son idénticas.

Es directo ver que $\delta(X) < +\infty$ y que $\delta'(X) < +\infty$. Gracias a esto y a la parte (c) es posible definir dos espacios métricos (E, d) y (E, d') asociados a (X, δ) y (X, δ') respectivamente.

- (f) (1 pto.) Sea $B = \{A \subset \mathbb{N} \mid A \neq \emptyset, \#A < +\infty\}$. Mostrar que \mathbb{N} es punto de acumulación de B en (E, d) , pero no en (E, d') . ¿Qué concluye sobre las métricas d y d' ?

Problema 3. Sea E el conjunto de todas las funciones continuas $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que f es derivable en $[0, 1]$ y su derivada f' es continua en $[0, 1]$. Para $f, g \in E$ definimos

$$\begin{aligned}d_1(f, g) &= \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)| \\ d_2(f, g) &= |f(0) - g(0)| + \sup_{0 \leq x \leq 1} |f'(x) - g'(x)|.\end{aligned}$$

- (a) (1 pto.) Demostrar que d_1 y d_2 son métricas sobre E .

Llamamos E_1 al espacio métrico (E, d_1) y E_2 al espacio métrico (E, d_2) .

- (b) (1 pto.) Demostrar que la aplicación $\text{id} : E \rightarrow E$ definida por $\text{id}(f) = f$ es uniformemente continua cuando se considera de E_2 en E_1 . *Indicación:* puede usar el Teorema del Valor Medio: para $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ con $X \subset \mathbb{R}$ intervalo y h, h' continuas, se tiene que $\forall a, b \in X \exists c \in \mathbb{R}$ tal que $h(b) - h(a) = h'(c)(b - a)$.
- (c) (1 pto.) Sea $f \in E$. Se denota T_f a la aplicación $T_f : [0, 1] \rightarrow E$ tal que $T_f(t) = tf$. Demostrar que $T_f : [0, 1] \rightarrow E_2$ es continua.
- (d) (1 pto.) Demostrar que E_2 es conexo (puede usar (c) para escribir E_2 como una reunión de conexos). Demostrar que E_1 es conexo.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$.

- (e) (1 pto.) Demostrar que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0 en E_1 , pero no tiene límite en E_2 . *Indicación:* demostrar que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene límite en E_2 éste sería 0. Luego pruebe que 0 NO es el límite.
- (f) (0.5 ptos.) ¿Qué puede decir de la aplicación $\text{id} : E_1 \rightarrow E_2$?
- (g) (0.5 ptos.) Compare las topologías de E_1 y E_2 .

Tiempo: 5hrs. Buena suerte.