

Control #1

Resolución (una forma posible de resolverlo)

Problema 1.-

$$(a) \quad \phi = \bar{v}^{-1}(\phi), \quad x = \bar{v}^{-1}(x/R) \Rightarrow \phi, x/R \in \sigma_R$$

$$(A_i)_{i=1}^n \in \sigma_R \Rightarrow \bar{v}^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \bigcap_{i=1}^n \bar{v}^{-1}(A_i) \in \sigma$$

$$\Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \sigma_R$$

$$(A_i)_{i \in I} \in \sigma_R \Rightarrow \bar{v}^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \bar{v}^{-1}(A_i) \in \sigma$$

$$\Leftrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \sigma_R$$

$$(b) \quad \text{Sea } A \in \sigma_R \Rightarrow \bar{v}^{-1}(A) \in \sigma, \text{ por definición de } \sigma_R \\ \Leftrightarrow \bar{v} \text{ es continua}$$

(c) Si  $\sigma'_R$  es otra topología que hace continua a  $\bar{v}$ , entonces

$$\forall A \in \sigma'_R \Rightarrow \bar{v}^{-1}(A) \in \sigma, \text{ por ser } \bar{v} \text{ continua por } \sigma'_R \\ \Rightarrow A \in \sigma_R, \text{ por definición de } \sigma_R$$

$$\text{Así, } \sigma'_R \subset \sigma_R.$$

(d)  $[x]$ , mirado como subconjunto de  $X$ , es

$$[x] = \bar{v}^{-1}(\{[x]\}), \text{ es decir,}$$

es la pre-imagen por  $\gamma$  del singleton  $\{[x]\}$  en  $X/R$ , que es cerrado por ser  $X/R$  separado. Así,  $[x]$  es cerrado en  $X$  como pre-imagen de un cerrado por una aplicación continua.

(e) 1. Si  $(x,y), (x',y')$  son dos puntos distintos en  $X$ , entonces existen vecindades disjuntas en  $\mathbb{R}^2$  que los separen. Las trazas de estas vecindades sobre  $X$  separan a los puntos  $(x,y), (x',y')$  en  $X$ .

2. Por definición de  $R$ , y de espacio cociente,

$$X/R = \{ [(-1,0)], [(1,0)] \} \cup \{ [(-1,y)] \mid y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \}$$

Como  $X$  es cerrado, basta ver que las clases son cerradas en  $\mathbb{R}^2$ . Ahora bien,  $[(-1,0)] = \{(-1,0)\}$ ,  $[(1,0)] = \{(1,0)\}$ , que son singletons en  $\mathbb{R}^2$ , y entonces cerrados, y  $[(-1,y)]$ ,  $y \neq 0$ , es el conjunto  $\{(-1,y), (1,y)\}$ , que también es cerrado.

3. Supongamos que existieran  $U, V$ , vecindades de  $[(-1,0)]$ ,  $[(1,0)]$ , resp., tales que  $U \cap V = \emptyset$ . Por definición de topología cociente, existen abiertos  $\omega, \pi$  de  $\mathbb{R}^2$ , tales que

$$\gamma^{-1}(U) = \omega \cap X \ni (-1,0)$$

$$\gamma^{-1}(V) = \pi \cap X \ni (1,0)$$

Como  $\gamma^{-1}$  es inyectiva (trivialmente),  $\gamma^{-1}(U) \cap \gamma^{-1}(V) = \emptyset$ , y entonces

$$\omega \cap \pi = \emptyset$$

Alors bien, comme  $\omega$  est voisinage de  $(-1, 0)$  en  $\mathbb{R}^2$ , et  $\pi$  l'est de  $(1, 0)$ , existe  $\delta \neq 0$  tel que  $(-1, \delta) \in \omega$  et  $(1, \delta) \in \pi$ .  
Par définition de  $R$ ,  $(-1, \delta) R (1, \delta)$ , et alors

$$\begin{aligned} [(-1, \delta)] &= [(1, \delta)] \in \mathcal{V}(\mathcal{V}^{-1}(U)) = U \\ &\text{y también} \quad \in \mathcal{V}(\mathcal{V}^{-1}(V)) = V \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U \cap V \neq \emptyset \quad \underline{\quad \times \quad}.$$



Problema 2.

(a) ( $\Rightarrow$ ) Sea  $A$  tal que  $\bar{A} = X$  y sea  $U$  abierto no vacío de  $X$ . Luego,  $\exists x \in U$ . Pero,  $x \in X = \bar{A}$  y  $U$  es vecindad de  $x$ , entonces  $U \cap A \neq \emptyset$ .

( $\Leftarrow$ ) Sea  $x \in X$  y  $U$  abierto que contiene  $x$ , i.e.,  $U$  vecindad de  $x$ . Por hipótesis,  $U \cap A \neq \emptyset$ , y entonces  $x \in \bar{A}$ . Así,  $X = \bar{A}$ .

(b) Sea  $\{B_i : i \in \mathbb{N}\}$  una base numerable de abiertos.  $\forall i \in \mathbb{N}$ , escogamos  $x_i \in B_i$  (si  $B_i \neq \emptyset$ ; note que esta elección no requiere uso del axioma de elección pues  $i$  recorre un conjunto numerable) y sea  $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i\}$ , que es entonces numerable. Basta probar que  $\bar{A} = X$ , y para ello, usamos (a).

Sea  $U$  abierto no vacío de  $X$ . Entonces existe  $I \subseteq \mathbb{N}$  tal que  $U = \bigcup_{j \in I} B_j$ . Así,

$$A \cap U = A \cap \bigcup_{j \in I} B_j = \bigcup_{j \in I} (A \cap B_j) \supset \bigcup_{j \in I} \{x_j\} \neq \emptyset$$

Así,  $\forall U \neq \emptyset$ ,  $U \cap A \neq \emptyset$  y entonces  $\bar{A} = X$ , por (a).

(c) 1. Tenemos  $\bar{A} = X$ , y queremos probar que  $\overline{f(A)} = Y$ . Para ello, usaremos (a). Sea  $U$  un abierto no vacío de  $(Y, \mathcal{O})$ . Estudiamos  $U \cap f(A)$ . Como  $f$  es continua,  $f^{-1}(U)$  es abierto no vacío de  $(X, \mathcal{O})$ , pues  $f$  es sobreyectivo. Así,  $f^{-1}(U) \cap A \neq \emptyset$  y también  $f(f^{-1}(U) \cap A) \neq \emptyset$ . Pero,

$$f(f^{-1}(U) \cap A) = U \cap f(A)$$

y entonces  $U \cap f(A) \neq \emptyset$ , y como esto es cierto para todo  $U$ , queda

a (a), se concluye que  $f(A)$  es denso.

2. En particular, si  $X$  es separable, posee un subconjunto  $A$ , numerable, denso.  $f(A)$  es también numerable (en efecto, como  $f$  es función, la imagen de un punto es única, es un punto de  $Y$ , y entonces  $\#(f(A)) \leq \#(A)$ ). Por 1, se tiene que  $\overline{f(A)} = Y$ , y así  $Y$  es separable.

### Problema 3.-

(a) Demuestra que  $\sigma$  satisface los 3 axiomas de topología.  
(axioma 1)

$$\phi = [a, a) \times [b, b) \in \sigma$$

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{a, b, c, d \in \mathbb{R}} [a, b) \times [c, d) \quad \circ \quad \bigcup_{n, m \in \mathbb{Z}} [n, n+m) \times [m, m+1)$$

$$\text{Así, } \phi, \mathbb{R}^2 \in \sigma$$

(axioma 2) Sea  $(U_j)_{j \in J}$  una familia de elementos de  $\sigma$ , es decir,  $\forall j \in J, \exists I_j$ :

$$U_j = \bigcup_{i \in I_j} [a_i^{(j)}, b_i^{(j)}) \times [c_i^{(j)}, d_i^{(j)})$$

Así,

$$\begin{aligned} \bigcup_{j \in J} U_j &= \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I_j} [a_i^{(j)}, b_i^{(j)}) \times [c_i^{(j)}, d_i^{(j)}) \\ &= \bigcup_{(j, i) \in J \times I_j} [a_i^{(j)}, b_i^{(j)}) \times [c_i^{(j)}, d_i^{(j)}) \end{aligned}$$



y entonces  $\bigcup_{j \in J} U_j \in \mathcal{O}$ .

(axioma 3) Sean  $U_1 = \bigcup_{i \in I} [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$  y  $U_2 = \bigcup_{j \in J} [a_j, b_j] \times [c_j, d_j]$

dos elementos de  $\mathcal{O}$ . Luego,

$$\begin{aligned} U_1 \cap U_2 &= \bigcup_{(i,j) \in I \times J} ([a_i, b_i] \times [c_i, d_i]) \cap ([a_j, b_j] \times [c_j, d_j]) \\ &= \bigcup_{(i,j) \in I \times J} ([a_i, b_i] \cap [a_j, b_j]) \times ([c_i, d_i] \cap [c_j, d_j]) \end{aligned}$$

Ahora bien,  $\forall i, j$

$$[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] = [\max(a_i, a_j), \min(b_i, b_j)] \text{ o bien } = \emptyset, \text{ y}$$

una identidad análoga para  $[c_i, d_i] \cap [c_j, d_j]$ . Así,  $U_1 \cap U_2$  tiene la forma

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{k \in K} [a_k, b_k] \times [c_k, d_k] \in \mathcal{O}.$$

(b) Sea  $A = \mathbb{Q}^2$  (numerable, pues es producto de 2 conjuntos numerables). Para probar que  $A$  es denso ( $\bar{A} = \mathbb{R}^2$ ), usamos Pb. 1 (a).

Sea  $U$ , abierto no vacío de  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ . Entonces, por definición, existe  $I$  e intervalos  $[a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$  tales que

$$U = \bigcup_{i \in I} [a_i, b_i) \times [c_i, d_i).$$

Como  $U \neq \emptyset$ , entonces existe  $i \in I$  tal que  $[a_i, b_i) \times [c_i, d_i) \neq \emptyset$ , es decir,  $a_i < b_i$  y  $c_i < d_i$ .

Así, podemos encontrar  $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$  tales que  $a_i < \alpha < b_i$  y  $c_i < \beta < d_i$ .

luego,  $U \cap \mathbb{Q}^2 \supset \{(\alpha, \beta)\} \neq \emptyset$ . Se concluye, gracias a (a) del pb. 1., que  $(\mathbb{R}^2, \sigma)$  es separable.

$$(c) \quad U \in \sigma_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow U = \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$$

Para probar que  $\sigma$  es más fina que  $\sigma_{\mathbb{R}^2}$ , basta ver que todo abierto de  $\sigma_{\mathbb{R}^2}$  es abierto de  $\sigma$ . Ahora bien, si se prueba que cualquier conjunto  $(a, b) \times (c, d)$  pertenece a  $\sigma$ , entonces, como  $\sigma$  es una topología, una reunión cualquiera de conjuntos  $(a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$  (es decir, un  $U$  cualquiera en  $\sigma_{\mathbb{R}^2}$ ) pertenecerá a  $\sigma$ .

Sea entonces  $(a, b) \times (c, d) \neq \emptyset$ , subconjunto  $\mathbb{R}^2$  (obviemos el sub-índice  $i$  para hacernos la vida más fácil), y probemos la identidad

$$(a, b) \times (c, d) = \bigcup_{\substack{\alpha > a, \beta > c \\ \alpha, \beta \in \mathbb{Q}}} [\alpha, b) \times [\beta, d)$$

Con esto, se tiene inmediatamente que  $(a, b) \times (c, d) \in \sigma$ .



Ahora bien, si  $x > a$  y  $y > c$ , entonces  $[x, b) \times [y, d) \subset (a, b) \times (c, d)$ ,  
y entonces

$$\bigcup_{\alpha, \beta \dots} [x, b) \times [y, d) \subset (a, b) \times (c, d).$$

Inversamente, sea  $(x, y) \in (a, b) \times (c, d)$ . Entonces  $x > a$ ,  
 $y > c$  y  $(x, y) \in [x, b) \times [y, d)$ . Así,

$$(x, y) \in \bigcup_{\substack{x > a, y > c \\ x, y \in \mathbb{R}^2}} [x, b) \times [y, d).$$

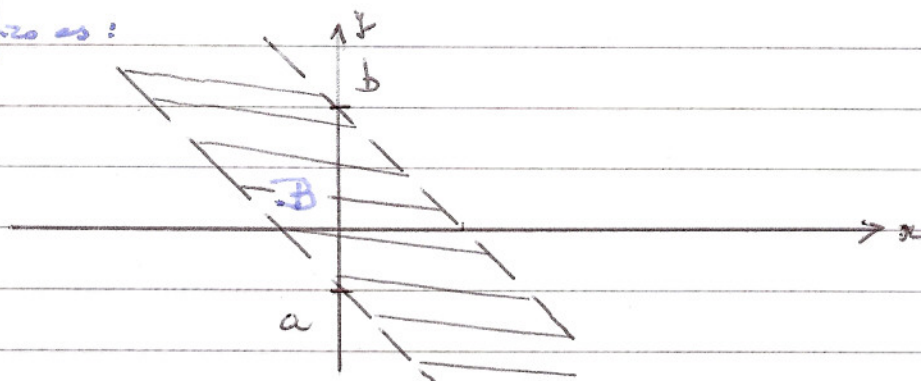
Nota .— También es posible probar que

$$(c, b) \times (c, d) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a + \frac{1}{n}, b) \times [c + \frac{1}{n}, d).$$

(d) Sea  $(a, b)$  un intervalo real, abierto, no vacío. La pre-  
imagen por  $f$  de  $(a, b)$  es la banda de  $\mathbb{R}^2$ ,

$$B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x + y < b \},$$

cuyo gráfico es:



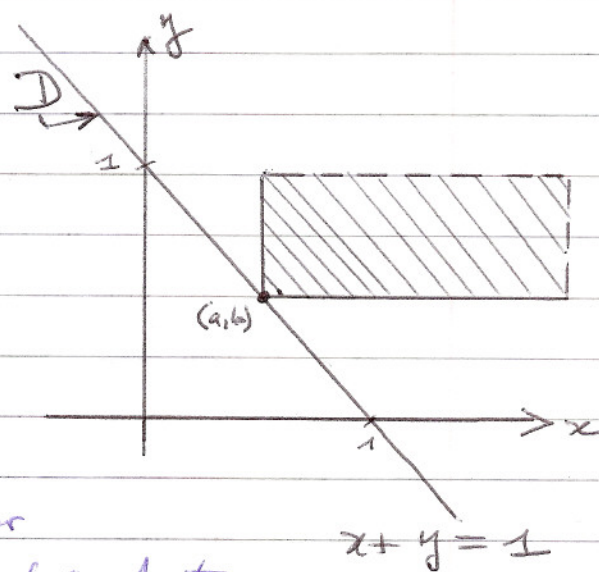


Para todo  $(x,y) \in D$  es posible encontrar  $\delta > 0$  tal que  $(x-\delta, x+\delta) \times (y-\delta, y+\delta) \subset B$ , y entonces  $B$  es abierto en  $\sigma_{\mathbb{R}^2}$  (topología usual). Así,  $f$  es continua.

Se deduce que el conjunto  $D = f^{-1}(\{1\})$  es cerrado, por ser preimagen del cerrado  $\{1\}$  de  $\mathbb{R}$ . Ahora bien, si  $D$  es cerrado en  $(\mathbb{R}^2, \sigma_{\mathbb{R}^2})$ , entonces  $\mathbb{Q}^2 \cap D$  es abierto en  $(\mathbb{R}^2, \sigma_{\mathbb{R}^2})$ , y entonces  $\mathbb{Q}^2 \cap D$  es abierto en  $(\mathbb{R}^2, \sigma)$  pues  $\sigma \supset \sigma_{\mathbb{R}^2}$ . Así,  $D$  es cerrado en  $(\mathbb{R}^2, \sigma)$ .

(e) Sea  $\sigma_D$  la topología inducida por  $\sigma$  sobre  $D$ . Para que  $\sigma_D$  sea la topología discreta, es decir  $\sigma_D = \mathcal{P}(D)$ , basta con probar que todo singleton es abierto para  $\sigma_D$ , es decir, todo punto es traza de un abierto de  $\sigma$ .

Sea  $(a,b) \in D$ , es decir,  $a+b=1$ , y sea  $[a, a+1) \times [b, b+1) \cap D = \{(a,b)\}$  (en efecto, sea  $(x,y) \in [a, a+1) \times [b, b+1) \cap D$ , entonces  $x \geq a$ ,  $y \geq b$  y  $x+y=1=a+b$   
 $\Rightarrow x-a = b-y \geq 0 \Rightarrow b \geq y$   
 $\Rightarrow b=y$ , y entonces  $a=x$ ).



Ahora, si todo punto es abierto, cualquier subconjunto de  $D$  será abierto, como unión de sus puntos.

(f) La aplicación  $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$  es, trivialmente,  $(x,y) \longmapsto f(x,y) = x$  una biyección, y entonces  $D$  no es numerable, pues  $\mathbb{R}$  no

es numerable.

Para que  $(D, \sigma_D)$  no sea separable, basta en probar que la adherencia (cerradura) de cualquier conjunto numerable de  $D$ , no es  $D$ . Sea entonces  $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  un conjunto numerable de puntos de  $D$ . Sabemos que  $A \neq D$ . Denotemos  $x_n = (\alpha_n, \beta_n)$ . Sea  $(\alpha, \beta) \in \bar{A}$ . Entonces para toda  $V \in \sigma_D$ , vecindad de  $(\alpha, \beta)$ ,  $V \cap A \neq \emptyset$ . En particular,  $\{(\alpha, \beta)\}$  es vecindad de si mismo, de  $(\alpha, \beta)$ , y así,  $\{(\alpha, \beta)\} \cap A \neq \emptyset$ . Entonces  $(\alpha, \beta) \in A$ , y se tiene que  $\bar{A} \subset A$ . Así,  $\bar{A} = A \neq D$ .