

## Trabajo dirigido #10 MA38B

Profesor de cátedra: Carlos Conca.

Profesores auxiliares: Roberto Cortez, Cristian Figueroa, Diego Morán.

**Problema 1.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un e.v.n. Dada una sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $E$ , decimos que la serie  $\sum x_n$  es *absolutamente convergente* si la serie  $\sum \|x_n\|$  converge en  $\mathbb{R}$ . Púebse que  $(E, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach si y sólo si toda serie absolutamente convergente es convergente.

**Problema 2.** Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un e.v.n. Para  $M \subseteq X$  y  $N \subseteq X^*$  se definen los *aniquiladores*

$$M^\perp = \{x^* \in X^* : x^*(x) = 0 \text{ para todo } x \in M\}$$
$${}^\perp N = \{x \in X : x^*(x) = 0 \text{ para todo } x^* \in N\}.$$

- (a) Probar que  $M$  es un s.e.v. cerrado de  $X$  ssi  $M = {}^\perp(M^\perp)$ .
- (b) Probar que si  $M$  es s.e.v. cerrado de  $X$  entonces la aplicación  $\rho : X^*/M^\perp \rightarrow M^*$  dada por  $\rho([x^*]) = x^*|_M$  está bien definida y es una isometría lineal.

**Problema 3.** Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un Banach real y  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$  una *base de Schauder*, es decir, *para todo  $x \in X$  existe una única sucesión de escalares  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - \sum_{k=0}^n \alpha_k x_k\| = 0.$$

Definamos  $Y = \{(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}} : \sum_{k=0}^n \alpha_k x_k \text{ converge}\}$ , el cual dotamos de la norma

$$\|(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=0}^n \alpha_k x_k \right\|.$$

- (a) Probar que  $(X, \|\cdot\|)$  es separable.
- (b) Probar que  $(Y, \|\cdot\|)$  es Banach.
- (c) Probar que existe un homeomorfismo lineal  $T : X \rightarrow Y$ .
- (d) Sea  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f_n(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_k) = \alpha_n$ . Probar que  $f_n \in X^*$ .
- (e) Deducir que  $x_n \notin \overline{\{x_k : k \neq n\}}$ .