

## Resolución P1.(c) trabajo dirigido #4 MA38B

**Problema.** Sean  $E$  y  $F$  espacios topológicos. Considere  $p_E : E \times F \rightarrow E$  la proyección de  $E \times F$  en  $E$ . Muestre que si  $F$  es compacto, entonces la aplicación  $p_E$  es cerrada.

**Solución.** Sea  $C$  un cerrado de  $E \times F$ . Probaremos que  $p_E(C)^c$  es abierto en  $E$ . Sea  $x \in p_E(C)^c$ , debemos encontrar una vecindad de  $x$  que no interseque a  $p_E(C)$ . Como  $x \notin p_E(C)$ , se tiene que  $\forall y \in F, (x, y) \notin C$ . Como  $C$  es cerrado, para cada  $y \in F$  existirá una vecindad de  $(x, y)$  que no interseca a  $C$ , vecindad que podemos suponer de la forma  $U_y \times V_y$ , con  $U_y$  abierto de  $E$  y  $V_y$  abierto de  $F$ . Claramente  $(V_y)_{y \in F}$  es un recubrimiento abierto de  $F$ , del cual, por compacidad de  $F$ , podemos extraer un sub-recubrimiento finito  $(V_{y_i})_{i=1}^n$ . Consideremos  $U := \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ , el cual es una vecindad de  $x$ . Afirmamos que  $U$  no interseca a  $p_E(C)$ . En efecto: dado  $x' \in U$  y dado cualquier  $y' \in F$ , se tendrá que  $y' \in V_{y_i}$  para algún  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Luego,

$$(x', y') \in U \times V_{y_i} \subset U_{y_i} \times V_{y_i},$$

donde sabemos que el conjunto a la derecha en la inclusión anterior no interseca a  $C$ , lo cual implica que  $(x', y') \notin C$ . Como esto es válido para cualquier  $y' \in F$ , se concluye que  $x' \notin p_E(C)$ , lo cual prueba que  $U$  no interseca a  $p_E(C)$  y concluye la demostración.