

MA38B Análisis. Semestre 2007-02

Profesor: Roberto Cominetti Auxiliares: Cristóbal Guzmán y Felipe Olmos

Guía 1

24 de Agosto de 2007

P1.- *Caracterización de los Abiertos de $\mathbb{R}$*

Sea Θ un abierto de $\mathbb{R}$ (con la topología usual). Para cada $x \in \Theta$ definimos:

$$b_x := \sup\{b : (x, b) \subseteq \Theta\}, \quad a_x := \inf\{a : (a, x) \subseteq \Theta\}$$

1. Demuestre que los conjuntos $\{b : (x, b) \subseteq \Theta\}$, $\{a : (a, x) \subseteq \Theta\}$ son no vacíos.
2. Demuestre que $(a_x, b_x) \subseteq \Theta$.
3. Demuestre que $a_x \notin \Theta$ y $b_x \notin \Theta$.
4. Concluya que existe una colección numerable de intervalos abiertos disjuntos $\{(a_k, b_k) : k \in \mathbb{N}\}$ tales que $\Theta = \bigcup_{k=0}^{\infty} (a_k, b_k)$.

P2.- Recomendamos hacer los ejercicios :

1. Problema 2 , Trabajo Dirigido 1 2006
2. Problema 2 , Trabajo Dirigido 2 2006
3. Parte I, Control 1 2001

P3.- *La recta de Sorgenfrey*

Considere la siguiente familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

1. Verifique que $\mathcal{B}$ es base de una topología τ sobre $\mathbb{R}$. Llamamos a $(\mathbb{R}, \tau)$ la recta de Sorgenfrey.
2. Muestre que la topología de Sorgenfrey es estrictamente más fina que la topología usual.
3. Muestre que τ no es discreta.
4. Caracterice la convergencia de sucesiones en τ .
5. Muestre que la recta de Sorgenfrey es un espacio separable que satisface el primer axioma de numerabilidad pero no el segundo. Basta usar sucesiones para caracterizar la convergencia?
6. Concluya que este espacio no es metrizable (es decir, no existe una métrica que induzca su topología).

P4.- *Topologías en $C([0, 1], \mathbb{R})$*

Considere el conjunto $C = C([0, 1], \mathbb{R})$ de las funciones continuas reales valuadas en $[0, 1]$. Definamos para $f \in C$ y $\epsilon \geq 0$:

$$M(f, \epsilon) = \{g \in C : \int_0^1 |f - g| \leq \epsilon\}$$

$$U(f, \epsilon) = \{g \in C : \sup_x |f(x) - g(x)| \leq \epsilon\}$$

1. Pruebe que la familia $\{M(f, \epsilon) : f \in C, \epsilon \geq 0\}$ es base de alguna topología $\mathcal{M}$ en C . Explique brevemente por qué la familia $\{U(f, \epsilon) : f \in C, \epsilon \geq 0\}$ es base para una topología $\mathcal{U}$ en C .
2. Pruebe que ambas topologías son distintas (Hint: use las funciones x^n $n \in \mathbb{N}$). Más aún, pruebe que $\mathcal{M} \subset \mathcal{U}$.
3. Considere ahora, para $f \in C$, $\epsilon \geq 0$ y un conjunto finito $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$:

$$L_{(x_1, x_2, \dots, x_n, \epsilon)}(f) = \{g \in C : |f(x_i) - g(x_i)| \leq \epsilon, i = 1, \dots, n\}$$

Pruebe que:

- a) Estas vecindades forman una base de alguna topología $\mathcal{L}$ en C .
- b) $\mathcal{L} \subset \mathcal{U}$
- c) $\mathcal{L}$ y $\mathcal{M}$ no están incluídas una en la otra.

P5.- Sea $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Para $(m, n) \in X$ definimos

$$B_{(m,n)} = \begin{cases} \{(m, n)\} & \text{si } (m, n) \neq (0, 0) \\ \{V \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (0, 0) \in V \text{ y } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \text{ el conjunto } \{k \in \mathbb{N} : (n, k) \in V\} \text{ es finito}\} & \text{si } (m, n) = (0, 0) \end{cases}$$

Pruebe que :

1. $\{B_{(m,n)}\}_{(m,n) \in X}$ es una base de vecindades de alguna topología τ en X
2. (X, τ) es Hausdorff
3. Ninguna sucesión en $X \setminus \{(0, 0)\}$ converge a $(0, 0)$
4. Existe una sucesión en $X \setminus \{(0, 0)\}$ que tiene a $(0, 0)$ como punto de acumulación

Recuerde/Decimos que :

- Una *sucesión* en un espacio X es una función desde $\mathbb{N}$ a X
- Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ converge hacia un punto $x_0 \in X$ si $\forall V \in \mathcal{N}_{x_0}, \exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0, x_n \in V$
- Un punto x es *punto de acumulación de una sucesión* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ si $\forall V \in \mathcal{N}_x, \forall N \exists n \geq N, x_n \in V$

P6.- Sea $D = \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto y $\varphi_2, \varphi_3 : D \rightarrow [0, 1]$ definidas por

$$\varphi_2(a) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{a_i}{2^{i+2}}$$

$$\varphi_3(a) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{a_i}{3^{i+1}}$$

1. Pruebe que φ_2 y φ_3 son continuas, con φ_2 sobreyectiva y φ_3 inyectiva
2. Sea $C = \varphi_3(D)$ (que se llama *Conjunto de Cantor*). Probar que C es compacto (es decir cerrado y acotado) y que $\varphi_3 : D \rightarrow C$ es homeomorfismo. Deduzca que existe $h : C \rightarrow [0, 1]$ continua y sobreyectiva. Es tal h un homeomorfismo?
3. Probar que para todo $k \in \mathbb{N}$ el espacio D es homeomorfo a D^k y deducir que $h : C \rightarrow [0, 1]^k$ continua y sobreyectiva. Generalizar al *Cubo de Hilbert* $I^\infty = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ dotado de la topología producto.
4. Sea $H = \prod_{n \in \mathbb{N}} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \subseteq \ell^2$ con la topología traza. Probar que I^∞ y H son homeomorfos, y que H tiene interior vacío en ℓ^2 .

P7.- Decimos que una topología satisface la *Condición de la cadena numerable (CCN)* sí y solo sí toda familia disjunta de abiertos es numerable o finita. Demuestre que todo espacio separable satisface CCN

Sea X un conjunto no numerable, definimos la *topología del complemento numerable* en X como sigue :

$$\tau = \{A \subseteq X : |A^c| \leq \aleph_0\} \cup \{X, \emptyset\}$$

1. Demuestre que τ es una topología
2. Demuestre que es T_1 y que no es Hausdorff.
3. Demuestre que no es separable y que satisface CCN

Consideremos ahora $Y = \{0, 1\}$ con la topología indiscreta Σ . Demuestre que $(X \times Y, \tau \otimes \Sigma)$ no es T_0