

Clase Aux.

Ocuparemos en lo que sigue el siguiente resultado conocido

Teo. (Fundamental de la Aritmética)

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ entonces $\exists p_1, \dots, p_m$ primos, $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tales que $n = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$. Además esta descomposición es única

Nota: Si, yo tampoco sabía que se llamaba "Teorema fundamental de la Aritmética"

Ej: Sea $K \in \mathbb{N}$, $K \geq 2$ entonces $\mathbb{N}^K \sim \mathbb{N}$

Dem: Usaremos Cantor-Bernstein-Schroder (CBS) para demostrar que hay una biyección entre $\mathbb{N}^K$ y $\mathbb{N}$.

Entonces debemos verificar que hay una inyección desde $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}^K$ y vice-versa.

y vice-versa.

$$\underline{IN \rightarrow IN^k} \quad \text{Sean } f: IN \rightarrow IN^k$$

$$n \rightarrow (n, n, n, \dots, n)$$

Esta función es claramente inyectiva.

$$\underline{IN^k \rightarrow IN} \quad \text{Consideremos } g: IN^k \rightarrow IN$$

$$(n_1, \dots, n_k) \rightarrow p_1^{n_1+1} p_2^{n_2+1} \dots p_k^{n_k+1}$$

Donde $\{p_1, \dots, p_k\}$ son los primeros k primos

Verifiquemos que esta es una función inyectiva

Sean $(n_1, \dots, n_k)$ y $(m_1, \dots, m_k) \in IN^k$ tales que

$$g((n_1, \dots, n_k)) = g((m_1, \dots, m_k)) \Leftrightarrow p_1^{n_1+1} \dots p_k^{n_k+1} = p_1^{m_1+1} \dots p_k^{m_k+1} = \ell \in IN$$

Luego ℓ tiene 2 descomposiciones en potencias de primos, luego por unicidad de la descomposición estas son iguales, y por tanto los exponentes de cada primo deben ser iguales, i.e.:

$$n_i + 1 = m_i + 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, k\} \Rightarrow n_i = m_i \quad \forall i \in \{1, \dots, k\} \checkmark$$

$$\Rightarrow g \text{ es iny.}$$

Finalmente se concluye que $IN^k \sim IN$ por CBS.

Usaremos la misma estrategia anterior para los siguientes ejercicios

$$\text{Ejrc } \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

⌈ (Funciones de $\mathbb{N}$
en un qto de $\aleph$ elem)

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \quad \text{Sabemos que } |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |2^{\mathbb{N}}| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$$

⌋ (Funciones de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$)

Luego existe una inyección de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ a $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ✓

$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ Definimos la siguiente función

$$\begin{aligned} g: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ (n_i)_{i \in \mathbb{N}} &\longrightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{p_i^{n_i+1}\} \end{aligned}$$

Donde p_i es el primo i -ésimo

Verifiquemos que es inyectiva

$$\text{Sean } (n_i)_{i \in \mathbb{N}}, (m_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ tales que } g((n_i)_{i \in \mathbb{N}}) = g((m_i)_{i \in \mathbb{N}})$$

$$= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{p_i^{n_i+1}\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{p_i^{m_i+1}\} \quad (*)$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$ se debe tener $p_i^{n_i+1} = p_i^{m_i+1}$ pues si no fuese así:

$$p_i^{n_i+1} = p_j^{m_j+1} \quad \text{con } j \neq i \quad (\text{eso por la igualdad de los qtos, } (*))$$

pero esto es imposible pues el número $n = p_i^{n_i+1}$ tendría otra descomposición distinta $(p_j^{m_j+1}) \rightarrow \times$

$$\text{Luego se tiene que } \forall i \in \mathbb{N} \quad p_i^{n_i+1} = p_i^{m_i+1} \Rightarrow n_i = m_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow g$ es iny.

y por CBS se concluye.

Ejrc: $\mathbb{R}^k \sim \mathbb{R} \quad k \geq 2$

Seguimos la misma filosofía jugando con primos, primero que nada notamos que esto es equivalente a demostrar que

$$\mathcal{P}(\mathbb{N})^k \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})^k$ Basta tomar la inyección canónica como en el caso $\mathbb{N}^k \sim \mathbb{N}$

$\mathcal{P}(\mathbb{N})^k \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ Consideramos la función

g. $\mathcal{P}(\mathbb{N})^k \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$
 $(A_1, A_2, \dots, A_k) \rightarrow \bigcup_{i=1}^k \tilde{A}_i$ donde $\tilde{A}_i = \begin{cases} \bigcup_{a \in A_i} \{p_{i+1}^{a+1}\} & \text{si } A_i \neq \emptyset \\ \mathbb{Z}^i & \text{si } A_i = \emptyset \end{cases}$ (Reservamos el 2 para el $\emptyset$)

Demostremos la inyectividad, supongamos $A_i \neq \emptyset, B_i \neq \emptyset \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$
 (el otro caso queda propuesto :D), tales que

$$g((A_1, \dots, A_k)) = g((B_1, \dots, B_k))$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\bigcup_{i=1}^k \bigcup_{a \in A_i} \{p_{i+1}^{a+1}\}}_A = \underbrace{\bigcup_{i=1}^k \bigcup_{b \in B_i} \{p_{i+1}^{b+1}\}}_B$$

$$(\Rightarrow A_i = B_i \quad \forall i \in \{1, \dots, k\})$$

Demostremos que $\forall j \in \{1, k\} \quad A_j \subseteq B_j$ y por simetría se tendrá $B_j \subseteq A_j$

$$\text{Sea } a \in A_i \Rightarrow p_{i+1}^{a+1} \in A \Rightarrow p_{i+1}^{a+1} \in B = \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{b \in B_i} \{p_{i+1}^{b+1}\}$$

$$\text{Notemos que necesariamente } p_{i+1}^{a+1} \in \bigcup_{b \in B_j} \{p_{i+1}^{b+1}\}$$

$$\text{pues de no ser así pertenecería a otro i.e.: } p_{i+1}^{a+1} \in \bigcup_{b \in B_{j'}} \{p_{i+1}^{b+1}\} \text{ con } j' \neq j$$

$$\Rightarrow \underbrace{p_{i+1}^{a+1} = p_{i+1}^{b+1}}_m \text{ para algún } b \in B_{j'}$$

$$\Rightarrow m \text{ tendrá 2 descomposiciones en potencias primas } \rightarrow \text{no}$$

$$\Rightarrow p_{i+1}^{a+1} = p_{i+1}^{b+1} \text{ algún } b \in B_j$$

$$\Rightarrow a=b \text{ con } b \in B_j \Rightarrow a \in B_j \Rightarrow A_i \subseteq B_j \checkmark$$

Ej: $\aleph^{\aleph} \sim \aleph$. Se hace la misma demostración que para $\aleph^k$ y queda propuesto

Obs: $|\aleph^{\aleph}| \geq |2^{\aleph}| = |\aleph| = |\aleph^{\aleph}|$ o sea $|\aleph^{\aleph}| \leq |\aleph^{\aleph}|$

— o —

Teo: [Dugundji] (58) ^{Arg.} Sean $X \geq X_0 \Rightarrow X \cdot X = X$
↳ aleph cero

Dem: Zorn, ver el libro

Cor: Sean $X, \bar{X}$ 2 cardinales con al menos uno de ellos infinito (i.e. $\geq X_0$) entonces

(a) $X + \bar{X} = X \cdot \bar{X} = \max(X, \bar{X})$

(b) Si $X < \bar{X}$ entonces $\bar{X} - X = \bar{X}$

(c) $Z \leq X \leq \bar{X} \rightarrow Z^X = X^X$

(d) $X^n = X$ si n es un cardinal finito

Dem: (a) obviemos $\bar{X} = \max(X, \bar{X})$

$\Rightarrow \bar{X} \leq X + \bar{X} \leq \bar{X} + \bar{X} = 2 \cdot \bar{X} \leq \bar{X} \cdot \bar{X} = \bar{X}$ ^{Teorema}

Recuerden que estamos trabajando con cardinales luego las desigualdades se prueban probando inyecciones entre representantes de X y $\bar{X}$ (recuerden que los cardinales son clases de equivalencia), por ejemplo:

$\bar{X} \leq X + \bar{X}$: Sean $A \in \bar{X}$ y $B \in \bar{X}$, por definición de suma

de cardinales $A \times \{0\} \cup B \times \{1\} \in X + \bar{X}$ luego la función

$B \rightarrow A \times \{0\} \cup B \times \{1\}$

$b \rightarrow (b, 1)$

es claramente una inyección

En general no será necesario demostrar estas cosas pues son bastante obvias si saben con los objetos que están trabajando (repto: clases de eq.)

Por eso es importante que tengan claro eso (repto x2: son clases de eq.) y también como se definen las operaciones entre cardinales

Prosigamos con la demo de (a)

$$\bar{X} = 1 \cdot \bar{X} \stackrel{(*)}{=} X \bar{X} \leq \bar{X} \bar{X} = X \quad \checkmark$$

(*) Por ejemplo $A = \{0\} \times B$ con $B \in \bar{X}$ pertenece a $1 \cdot \bar{X}$

(b) Debemos considerar representantes $B \in \bar{X}$, $A \in X$ tales que $A \subseteq B$
así $\bar{X} - X = [B \setminus A]_{\sim} = |B \setminus A|$ (así se anota)

Notemos que $\bar{X} - X \leq \bar{X}$ (tomando representantes y la inyección obvia)

Además para B y A se tiene

$$B = B \setminus A \cup A \quad (\cup \text{ es unión disjunta})$$

al ser la unión disjunta tenemos que $|B| = |B \setminus A| + |A|$

y por la parte (a) $|B| = \max(|B \setminus A|, |A|)$

pero $|B| > |A|$ (pues $\bar{X} > X$), luego no queda otra que

$$|B| = |B \setminus A| \quad \text{con lo que} \quad \bar{X} = \bar{X} - X \quad \checkmark$$

(c) Tenemos $Z \leq X \leq \bar{X}$

$$2^{\bar{X}} \leq X^{\bar{X}} \leq (2^X)^{\bar{X}} \stackrel{\text{probando!}}{=} 2^{X \cdot \bar{X}} \stackrel{(a)}{=} 2^{\bar{X}}$$

$$(\text{Cor. } |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0}, |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0}, |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0})$$

(d) Proqueto $\checkmark$