MA37A Optimización. Semestre 2007-2
Profesor: Alejandro Jofré **Auxiliar:** Sebastián Court, Julio Deride, Oscar Peredo.

Clase Auxiliar: Programación Lineal

2 de Noviembre del 2007

1. Recuerdo de Formulación de Problemas Lineales

Recordemos algunos problemas lineales vistos en la primera clase auxiliar:

Problema 1 (Carga transportada en un container). *Se desea maximizar la carga transportada dentro de un container. Tenemos cinco tipos de materiales distintos (A,B,C,D y E), cuyos pesos y volúmenes totales son los siguientes:*

tipo	*peso [kg]*	*volumen [m^3]*
A	*1*	*3*
B	*2*	*3*
C	*8*	*4*
D	*2*	*4*
E	*5*	*2*

Debe saber que la principal restricción concierne la capacidad del container dada por $7m^3$.
¿ Que fracción del total de cada material irá en el container?

Solución 1. ***Variables****:* x_i*=fraccion de la cantidad del tipo i que se llevara en el container (introduce una restriccion inmediata:* $0 \leq x_i \leq 1$*).*
Función objetivo*:*

$$\textbf{\textit{maximizar}} \qquad x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 2x_4 + 5x_5$$

Restricciones*:*
El volumen total no debe ser mayor que $7m^3$*:*

$$3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 2x_5 \quad \leq \quad 7$$

Todas las variables estan entre 0 y 1, pues son fracciones de la carga total de cada tipo:

$$x_i \quad \leq \quad 1$$

El problema queda:

$$\begin{array}{lcccccll}
\textbf{\textit{maximizar}} & x_1 & +2x_2 & +8x_3 & +2x_4 & +5x_5 & & \\
\textbf{\textit{s.a}} & 3x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +4x_4 & +2x_5 & \leq & 7 \\
 & x_1 & & & & & \leq & 1 \\
 & & x_2 & & & & \leq & 1 \\
 & & & x_3 & & & \leq & 1 \\
 & & & & x_4 & & \leq & 1 \\
 & & & & & x_5 & \leq & 1 \\
 & & & & & x_i & \geq & 0
\end{array}$$

Problema 2. *Una empresa manufacturera necesita determinar su plan de producción. Según los estudios realizados, el beneficio unitario por producto está dado por:*

Producto	*Precio por unidad*
P_1	$800 - x_1 - x_2$
P_2	$2000 - x_1 - 3x_2$

donde x_1 y x_2 son el número de unidades de los productos P_1 y P_2 respectivamente.
Además, para elaborar estos productos se requiere mano de obra, que denominaremos recurso 1 (R_1), y horas máquina, que será el recurso 2 (R_2).
La cantidad de recursos necesarios por producto y la disponibilidad de cada recurso, se detallan en la siguiente tabla:

Producto vs. Recurso (horas/unidad)	R_1	R_2
P_1	*8*	*7*
P_2	*3*	*6*
Disponibilidad (hora/mes)	*1200*	*2100*

Plantee el modelo que maximiza el beneficio total de la empresa.

Solución 2. *: Como se vio en el Control 1:*

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & (800 - x_1 - x_2)x_1 + (2000 - x_1 - 3x_2)x_2 \\
s.a \quad & 8x_1 + 3x_2 \leq 1200 \\
& 7x_1 + 6x_2 \leq 2100 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

2. Formas de traspaso a forma canónica o estandar $\{Ax = b, x \geq 0\}$

Ahora que ya recordamos algunas formas usuales de PL's, es necesario saber cual es la forma estandar de este tipo de problemas. ¿Para qué sirve esta forma estandar? Su utilidad se verá cuando se revise el método simplex, que recibe un PL en forma estandar y entrega una solución (punto extremo de la región factible).

- Holgura Inferior:

$$\begin{array}{rcl}
a_{k,1}x_1 + ... + a_{k,n}x_n & \leq & b_k \\
& \Leftrightarrow & \\
a_{k,1}x_1 + ... + a_{k,n}x_n + s_k & = & b_k
\end{array}$$

  con $x_i \geq 0, s_k \geq 0$.

- Holgura Superior:

$$\begin{aligned} a_{k,1}x_1 + ... + a_{k,n}x_n &\geq b_k \\ &\Leftrightarrow \\ a_{k,1}x_1 + ... + a_{k,n}x_n - s_k &= b_k \end{aligned}$$

  con $x_i \geq 0, s_k \geq 0$.

- Variable Irrestricta (1):

$$x_i \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad x_i = u_{i,1} - u_{i,2}, \qquad u_{i,j} \geq 0$$

- Variable Irrestricta (2):

$$\begin{aligned} a_{q,1}x_1 + ... + a_{q,r}x_r + ... + a_{q,n}x_n &= b_q, \qquad x_i \geq 0, i \neq r, x_r \in \mathbb{R} \\ a_{k,1}x_1 + ... + a_{k,n}x_n &= b_k, \qquad x_i \geq 0, i \neq r, x_r \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \\ a_{q,1}x_1 + ...+ & \\ \frac{a_{q,r}}{a_{k,r}}\left(b_k - a_{k,1}x_1 + ... + a_{k,r-1}x_{r-1} + a_{k,r+1}x_{r+1} + ... + a_{k,n}x_n\right) + & \\ ... + a_{q,n}x_n &= b_q, \qquad x_i \geq 0 \end{aligned}$$

3. Dualidad

En clases de cátedra se vió la construcción del dual a partir de las condiciones KKT junto a la dualidad débil y fuerte. Presentemos un resumen y las reglas de traspaso al dual:

El problema primal (P) tiene como problema dual (D):

$$(P): \begin{array}{lrcl} \textbf{min} & c^t x & & \\ \textbf{s.a} & Ax & \leq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array} \qquad (D): \begin{array}{lrcl} \textbf{max} & b^t y & & \\ \textbf{s.a} & A^t y & \leq & c \\ & y & \leq & 0 \end{array}$$

O equivalentemente:

$$(P'): \begin{array}{lrcl} \textbf{min} & c^t x & & \\ \textbf{s.a} & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array} \qquad (D'): \begin{array}{lrcl} \textbf{max} & b^t y & & \\ \textbf{s.a} & A^t y & \leq & c \\ & y & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

En el caso general, se tiene el siguiente cuadro:

minimización	maximización
Si la restricción es:	La variable es:
$\geq$	≥ 0
$\leq$	≤ 0
$=$	$\in \mathbb{R}$
Si la variable es:	La restricción es:
≥ 0	$\leq$
≤ 0	$\geq$
$\in \mathbb{R}$	$=$

Problema 3. *Calcule el dual del siguiente problema:*

$$\begin{array}{llllll} \boldsymbol{min} & 4x_1 & +6x_2 & +2x_3 & & \\ \boldsymbol{s.a} & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & \geq & 4 \\ & 4x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 5 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & & & x_3 & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

Solución 3. *El dual es:*

$$\begin{array}{llllll} \boldsymbol{max} & 4y_1 & +5y_2 & & \\ \boldsymbol{s.a} & 2y_1 & +4y_2 & \leq & 4 \\ & 3y_1 & +y_2 & \leq & 6 \\ & y_1 & -y_2 & = & 2 \\ & & y_1 & \geq & 0 \\ & & y_2 & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

4. Interpretación Económica de las Variables Duales o Precios Sombra

Afirmación 1. *Dado el problema $(P) : \text{mín}\{c^T x : Ax = b_i, i = 1, ..., m\}$, si el valor del lado derecho de la restricción i-ésima, b_i, se incrementa en un valor δ, entonces el valor de la función objetivo en el óptimo se incrementa aproximadamente en $\lambda_i^* \delta$.*

Problema 4. *Se sabe que 3 fondos mutuos A, B y C tienen retornos esperados del 10 %,10 % y 15 %. Se desea invertir en estos 3 fondos, minimizando el riesgo asociado, de tal manera que el retorno esperado sea de un 12 %. El riesgo se calcula como la varianza de la inversión, en este caso:*

$$400x^2 + 800y^2 + 200xy + 1600z^2 + 400yz$$

¿Que ocurre si se desea un retorno del 12.5 %?

Solución 4. *Definamos las variables x, y, z como el porcentaje de mis recursos que invierto en fondo A, B y C. El problema se plantea de la forma:*

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & 400x^2 + 800y^2 + 200xy + 1600z^2 + 400yz \\ s.a & x + y + 1{,}5z = 1{,}2 \\ & x + y + z = 1 \end{array}$$

Sin agregar las restricciones de positividad, usando multiplicadores de Lagrange, se tiene que:

$$\begin{aligned} L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) &= 400x^2 + 800y^2 + 200xy + 1600z^2 + 400yz + \lambda_1(1 - x - y - z) + \lambda_2(1{,}2 - x - y - 1{,}5z) \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= 800x + 200y - \lambda_1 - \lambda_2 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 1600y + 200x + 400z - \lambda_1 - \lambda_2 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 3200z + 400y - \lambda_1 - 1{,}5\lambda_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= 1 - x - y - z \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= 1{,}2 - x - y - 1{,}5z \end{aligned}$$

Resolver el sistema anterior, igualando a 0, se obtiene

$$\begin{aligned} x &= 0{,}5 \\ y &= 0{,}1 \\ z &= 0{,}4 \\ \lambda_1 &= 1800 \\ \lambda_2 &= -1380 \end{aligned}$$

Luego, como $\nabla g_1 = (-1,-1,-1)$ *y* $\nabla g_2 = (-1,-1,-1{,}5)$ *son l.i., entonces los valores encontrados son candidatos al óptimo. el valor de la función objetivo es 390. Para ver que se satisface la condicón suficiente, hay que ver si* $H_f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i H_{g_i}$ *es definido positivo.*

$$\begin{aligned} H_f(x,y,z) &= \begin{bmatrix} 800 & 200 & 0 \\ 200 & 1600 & 400 \\ 0 & 400 & 3200 \end{bmatrix} \\ H_{g_1}(x,y,z) &= 0 \\ H_{g_2}(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

Y como los valores propios de $H_f(x,y,z)$ *son 0.7491 1.5556 y 3.2953 aproximadamente, entonces es definida positiva en* R^3.
Si se cambia el retorno esperado a un 12.5 %, entonces utilizando la afirmacimación, $\Delta = 0{,}05$ *y el incremento en la función objetivo es* $\lambda_1 \Delta = 1800 * 0{,}05 = 90$.