**MA37A Optimización**. Semestre 2007-2
**Profesor:** Alejandro Jofré **Auxiliares:** Sebastián Court, Julio Deride, Oscar Peredo.

# Pauta Control 1

16 de octubre de 2007

**P1.** Considere el problema de minimizar $\|Ax-b\|^2$, donde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$.

a. Interprete geométricamente el problema.
b. Escriba las condiciones necesarias de optimalidad. Es suficiente?
c. Es la solución óptima única? Justifique.
d. Puede dar una expresión para la solución óptima?
e. Resuelva el problema para $A$ y $b$ definidas por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**P2.** Una empresa manufacturera necesita determinar su plan de producción. Según los estudios realizados, el beneficio unitario por producto está dado por:

| Producto | Precio por unidad |
|---|---|
| $P_1$ | $800 - x_1 - x_2$ |
| $P_2$ | $2000 - x_1 - 3x_2$ |

donde $x_1$ y $x_2$ son el número de unidades de los productos $P_1$ y $P_2$, respectivamente.
Además, para elaborar estos productos se requiere mano de obra, que denominaremos recurso 1 ($R_1$), y horas máquina, que será el recurso 2 ($R_2$). La cantidad de recursos necesarios por producto y la disponibilidad de cada recurso, se detallan en la siguiente tabla:

| Producto vs. Recurso (horas/unidad) | $R_1$ | $R_2$ |
|---|---|---|
| $P_1$ | 8 | 7 |
| $P_2$ | 3 | 6 |
| Disponibilidad (hora/mes) | 1200 | 2100 |

a. Plantee el modelo que maximiza el beneficio total de la empresa.
b. Utilice las condiciones de KKT para encontrar una solución factible del problema.
c. Verifique las condiciones necesarias y suficientes para el(los) punto(s) encontrado(s) en (b). Concluya.

**Solución**:

(a)

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & (800 - x_1 - x_2)x_1 + (2000 - x_1 - 3x_2)x_2 \\ \text{s.a} \quad & 8x_1 + 3x_2 \leq 1200 \\ & 7x_1 + 6x_2 \leq 2100 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(b) El hessiano de $f$ es $H_f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$, con valores propios -6.8284 y -1.1716, por lo tanto cóncava y de tener un óptimo, es global.
Considerando la transformación $-\text{mín} -f = \text{máx}\, f$, se tiene que $-f$ es convexa y si tiene un óptimo, es global.
El Lagrangeano es:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) &= -(800 - x_1 - x_2)x_1 - (2000 - x_1 - 3x_2)x_2 + \lambda 1(8x_1 + 3x_2 - 1200) \\ & +\lambda_2(7x_1 + 6x_2 - 2100) + \lambda_3(-x_1) + \lambda_4(-x_2) \end{aligned}$$

Las condiciones KKT son, con $\lambda_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -800 + 2x_1 + 2x_2 + 8\lambda_1 + 7\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -2000 + 2x_1 + 6x_2 + 3\lambda_1 + 6\lambda_2 - \lambda_4 = 0 \quad (2)$$

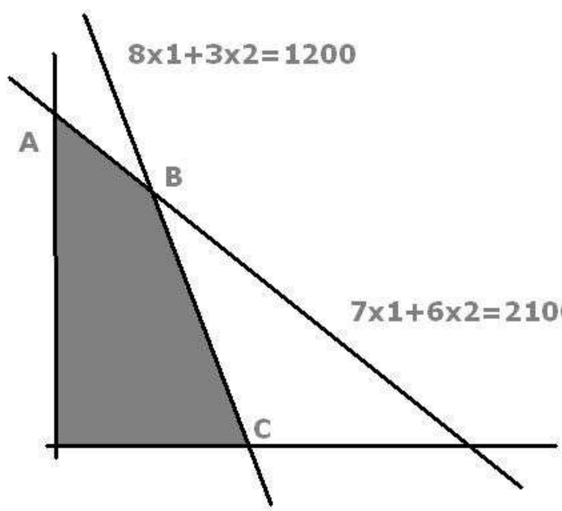
$$\lambda_1(8x_1 + 3x_2 - 1200) = 0 \quad (3)$$

$$\lambda_2(7x_1 + 6x_2 - 2100) = 0 \quad (4)$$

$$\lambda_3 x_1 = 0 \quad (5)$$

$$\lambda_4 x_2 = 0 \quad (6)$$

El objetivo es resolver el sistema anterior. Para ello, estudiaremos la región factible:




Veamos los diferentes casos:

Caso 1: Si la solución no esta en la frontera de la región factible, significa que no existen restricciones activas, $I = \phi$, luego $\lambda_i = 0, i = 1, 2, 3, 4$, y la solución de (1) y (2), $x_1 = 100, x = 2 = 300$ no satisface las restricciones. Por lo tanto, la solución esta en el borde.

Caso 2: Si la solución esta en $\overline{AB} \setminus \{A, B\}$, la segunda restricción esta activa, luego $\lambda_i = 0, i = 1, 3, 4$. De (1),(2) y la restricción activa $7x_1 + 6x_2 = 2100$, se tiene que $x_1 = 39{,}39, x_2 = 304{,}04, \lambda_2 = 16{,}16$, pero la primera restricción no se cumple.

Caso 3: Si la solución esta en $\overline{CB} \setminus \{C, B\}$, la primera restricción esta activa, luego $\lambda_i = 0, i = 2, 3, 4$. De (1),(2) y la restricción activa $7x_1 + 6x_2 = 2100$, se tiene que $x_1 = 39{,}39, x_2 = 304{,}04, \lambda_2 = 16{,}16$, pero la primera restricción no se cumple.

Caso 3: Si la solución esta en $\overline{CB} \setminus \{C, B\}$, la primera restricción esta activa, luego $\lambda_i = 0, i = 2, 3, 4$. De (1),(2) y la restricción activa $8x_1 + 3x_2 = 1200$, se tiene que $x_1 = 31{,}37, x_2 = 316{,}3, \lambda_1 = 13{,}1$, pero la segunda restricción no se cumple.

Caso 4: Si la solución es el punto $A = (0, 350)$, la primera y cuarta restricciónes no estan activa, luego $\lambda_i = 0, i = 1, 4$. Resolviendo (1) y (2) con los valores de A, se obtiene que $\lambda_2 = -16{,}7, \lambda_3 = -216{,}7$, por lo tanto, el punto es factible pero no óptimo (viola $\lambda_i \geq 0$).

Caso 5: Si la solución es el punto $B = (33{,}3, 311{,}1)$, la tercera y cuarta restricciónes no estan activa y la primera y segunda activas, luego $\lambda_i = 0, i = 3, 4$. Resolviendo (1) y (2) con los valores de B, se obtiene $\lambda_1 = 7{,}41, \lambda_2 = 7{,}41$. Por lo tanto esta solución es factible y óptima (recordemos que el óptimo es global).

Falta estudiar lo puntos origen y C, pero el valor de la función objetivo sera igual al obtenido en B.

(c) Como $f$ es estrictamente cóncava, el óptimo es global.

**P3.** a. i. Demuestre que, si $1 + v'A^{-1}u \neq 0$, se tiene que

$$(A + uv')^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv'A^{-1}}{1 + v'A^{-1}u}$$

**Solución:**
Recordemos que $B$ es la inversa de una matriz $A$ si se cumple que

$$A \cdot B = I \quad B \cdot A = I$$

Con lo cual, calculemos

$$\begin{aligned}
(A + uv')(A^{-1} - \frac{A^{-1}uv'A^{-1}}{1 + v'A^{-1}u}) &= AA^{-1} - A\frac{A^{-1}uv'A^{-1}}{1 + v'A^{-1}u} + uv'A^{-1} - uv'\frac{A^{-1}uv'A^{-1}}{1 + v'A^{-1}u}. \\
&= I - \frac{Iuv'A^{-1}}{1 + v'A^{-1}u} + uv'A^{-1} - \frac{uv'A^{-1}uv'A^{-1}}{1 + v'A^{-1}u}. \\
&= I + uv'A^{-1} - \frac{uv'A^{-1} + uv'A^{-1}uv'A^{-1}}{1 + v'A^{-1}u}. \\
&= I + uv'A^{-1} - \frac{(1 + v'A^{-1}u)uv'A^{-1}}{1 + v'A^{-1}u}. \\
&= I.
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
(A^{-1} - \frac{A^{-1}uv'A^{-1}}{1+v'A^{-1}u})(A+uv') &= A^{-1}A - \frac{A^{-1}uv'A^{-1}}{1+v'A^{-1}u}A + A^{-1}uv' - \frac{A^{-1}uv'A^{-1}}{1+v'A^{-1}u}uv'. \\
&= I - \frac{A^{-1}uv'}{1+v'A^{-1}u} + A^{-1}uv' - \frac{A^{-1}uv'A^{-1}uv'}{1+v'A^{-1}u}. \\
&= I + A^{-1}uv' - \frac{A^{-1}uv' + A^{-1}uv'A^{-1}uv'}{1+v'A^{-1}u}. \\
&= I + A^{-1}uv' - \frac{A^{-1}uv'(1+v'A^{-1}u)}{1+v'A^{-1}u}. \\
&= I.
\end{aligned}$$

ii. Aplique el método de Newton para minimizar la función

$$f(x) = \|x\|^{\beta},$$

donde $\beta > 1$ Para qué puntos iniciales y valores de $\beta$ el método converge al punto óptimo? Qué sucede cuándo $\beta \leq 1$?

**Solución:**

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\nabla f(x) &= \beta \|x\|^{\beta-2} x. \\
Hf(x) &= \beta \|x\|^{\beta-2} I + \beta(\beta-2) \|x\|^{\beta-4} xx'. \\
&= \beta \|x\|^{\beta-2} \Big( I + (\beta-2) \|x\|^{-2} xx' \Big)
\end{aligned}$$

Llamando $A = I, u = (\beta-2)\|x\|^{-2} x, v = x$, imponemos que $1 + (\beta-2)\|x\|^{-2} x'x \neq 0$ o equivalentemente, $1+\beta-2 \neq 0 \Leftrightarrow \beta \neq 1$, y usando la parte i, se obtiene que

$$\begin{aligned}
Hf(x)^{-1} &= \frac{1}{\beta \|x\|^{\beta-2}} \left[ I - \frac{(\beta-2)\|x\|^{-2} xx'}{1+x'(\beta-2)\|x\|^{-2} x} \right]. \\
&= \frac{1}{\beta \|x\|^{\beta-2}} \left[ I - \frac{(\beta-2)\|x\|^{-2} xx'}{1+\beta-2} \right]. \\
&= \frac{1}{\beta \|x\|^{\beta-2}} \left[ I - \frac{\beta-2}{\beta-1} \|x\|^{-2} xx' \right].
\end{aligned}$$

Finalmente, las iteraciones del método de Newton con paso constante $\alpha = 1$, vienen dadas por

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k - \frac{1}{\beta \|x_k\|^{\beta-2}} \left[ I - \frac{\beta-2}{\beta-1} \|x_k\|^{-2} x_k x_k' \right] \beta \|x_k\|^{\beta-2} x_k. \\
&= x_k - \left[ x_k - \frac{\beta-2}{\beta-1} \|x_k\|^{-2} x_k x_k' x_k \right]. \\
&= \frac{\beta-2}{\beta-1} x_k.
\end{aligned}$$

Luego, la convergencia del método viene dada por la condición

$$\|x_{k+1}\| < \|x_k\|.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1}\| < \|x_k\| &\Leftrightarrow \left|\frac{\beta-2}{\beta-1}\right| < 1. \\
&\Leftrightarrow -1 < \frac{\beta-2}{\beta-1} < 1. \\
&\Leftrightarrow 1-\beta < \beta-2, \quad \beta-2 < \beta-1. \\
&\Leftrightarrow \frac{3}{2} < \beta.
\end{aligned}$$

Se concluye que la condición para la convergencia del método viene dada por $\frac{3}{2} < \beta$, sin condición sobre punto inicial y notando que para $\beta = 2$ el método converge en un paso. Además los casos para $\beta \leq 1$ el método no converge (analizar diferenciabilidad de $f$).

b. Calcule los primeros dos términos $x^{(1)}, \quad x^{(2)}$ de la sucesión generada por el método de Newton $\{x^{(k)}\}$ para minimizar la función

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^4 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 5x_2,$$

con punto inicial $x^{(0)} = (0, 0)$. Dibuje las iteraciones.

**Solución:**

Se tiene que

$$\begin{aligned}
\nabla f(x) &= \begin{pmatrix} 8x_1^3 - 4x_2 \\ 2x_2 - 4x_1 + 5 \end{pmatrix} \\
Hf(x) &= \begin{bmatrix} 24x_1^2 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Con lo cual

$$\begin{aligned}
\nabla f(x_0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \\
Hf(x_0) &= \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \\
Hf(x_0)^{-1} &= \frac{1}{0-16} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Iterando Newton,

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - Hf^{-1}(x_0)\nabla f(x_0) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{16} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} \\
x_1 &= \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Para $x_2$,

$$\begin{aligned}
\nabla f(x_1) &= \begin{pmatrix} \frac{125}{8} \\ 0 \end{pmatrix} \\
Hf(x_0) &= \begin{bmatrix} \frac{75}{2} & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \\
Hf(x_0)^{-1} &= \frac{1}{75-16} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & \frac{75}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Realizando los cálculos

$$x_2 = \frac{1}{118} \begin{pmatrix} 85 \\ -125 \end{pmatrix}$$

(insertar dibujo).