Guía de ejercicios No. 4
MA36A Funciones de una variable compleja

Profesor.: Juan Dávila

Auxiliares: Julio Backhoff , Omar Larré

1. Sea $f : \setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ una función analítica sin ceros. En este problema probaremos que existe $k \in \mathbb{Z}$ y g_1, g_2 enteras sin ceros en $\mathbb{C}$ tales que

$$f(z) = z^k g_1(z) g_2(1/z) \ , \ \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

a) Pruebe que si D es un dominio y f es analítica y sin ceros en D, entonces existe una rama de $\log(f)$ en D si y solo si

$$\oint_\gamma \frac{f'}{f} = 0 \ , \ \forall\gamma \text{ camino cerrado suave en } D$$

b) Muestre que para un k conveniente, $z^{-k}f(z)$ posee una rama del logaritmo en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

c) Concluya.

2. Sean D y D' dominios simplemente conexos contenidos estrictamente en $\mathbb{C}$. Dados $z_o \in D$, $z_o' \in D'$ y $\theta \in (-\pi, \pi]$, probar que existe un único mapeo f conforme sobreyectivo de D en D' tal que $f(z_o) = z_o'$ y $\arg[f'(z_o)] = \theta$. Indicación: Para la existencia, utilice los mapeos de D y D' sobre la bola unitaria dados por el teorema de Riemann (que llamaremos h y g respectivamente). Para la unicidad,razonando por contradicción componga convenientemente todos los mapeos involucrados (h , g, el que se obtiene en la parte de existencia y el que aparece por la hipótesis de contradicción).

3. Sea D simplemente conexo, $D \neq \mathbb{C}$. Muestre que dado $z_o \in D$, existe un único radio $r > 0$ tal que existe un mapeo conforme sobreyectivo de D en $B(0, r)$ satisfaciendo $f(z_o) = 0$ y $f'(z_o) = 1$.

4. Sea D simplemente conexo, $D \neq \mathbb{C}$, muestre que no existe un mapeo conforme de $\mathbb{C}$ sobre D.

5. Pruebe que si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa y no tiene ceros en U, entonces $u = \log(|f|)$ es armónica en U.

6. Definamos u en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mediante $u(re^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{n} r^k(a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta))$ donde $a_j, \, b_j \in \mathbb{R}$ $j = 1, \dots, n$. Demuestre que u es armónica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y encuentre una armónica conjugada para u.

7. Pruebe que si $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es armónica y acotada superiormente o inferiormente, entonces u es constante.

8. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto. Una función continua $u : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice subarmónica si cumple lo siguiente: para todo $z_0 \in \Omega$ existe $\rho(z_0) > 0$ tal que para para $0 < r < \rho(z_0)$

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) \, d\theta.$$

Pruebe que si $u \in C^2(\Omega)$ entonces u es subarmónica si y sólo si $\Delta u \geq 0$ en Ω.

9. Sea D el disco $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ y $D^* = D \setminus \{z_0\}$. Suponga que $u : D^* \to \mathbb{R}$ es armónica y acotada. El objetivo es probar que u admite una extensión armónica a D. Para esto puede seguir los siguientes pasos:

a) Sea $0 < \rho < \text{mín}\{1, r\}$ y C el círculo $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_o| = \rho\}$. Construya una función armónica v en el disco $B = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_o| < \rho\}$ tal que $v = u$ en C.

b) Pruebe que si $m = \sup_{D^*} |u|$ entonces $|v(z)| \leq m$ para todo $z \in B$.

c) La idea es probar que $v = u$ en $B^* = B\setminus\{z_o\}$. Sea $t > 0$ y considere $w = v - u + t \log|z - z_o|$. Verifique que w es armónica en B^*.

d) Para $0 < \epsilon < \rho$ sea $B_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} : \epsilon < |z - z_0| < \rho\}$. Aplicando el principio del máximo a w en B_ϵ con ϵ suficientemente pequeño, deduzca que $w \leq 0$ en B_ϵ y concluya.

10. Generalice el ejercicio anterior, demostrando que si u es armónica en D^* y

$$\lim_{z\to z_0} \frac{u(z)}{\log|z-z_0|} = 0,$$

entonces u admite una extensión armónica a D.

11. Sea $A = \{z \in \mathbb{C} : a < |z| < b\}$ donde $0 < a < b$ y $u : A \to \mathbb{R}$ una función armónica. Pruebe que existe un único real c tal que $u(z) - c\log|z|$ posee una armónica conjugada en A.

12. Sea $L \subset \mathbb{C}$ una recta y $D \neq \mathbb{C}$ un abierto conexo y simplemente conexo simétrico con respecto a L. Sea $z_0 \in D \cap L$ y $f\colon D \to \Delta$ ($\Delta = \{z : |z| < 1\}$) la transformación conforme que satisface $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0$. Muestre que f es simétrica con respecto a L, es decir, $f \circ \rho = \rho \circ f$ donde ρ es la reflexión a través de L. Deduzca que $L \cap D$ es un intervalo abierto y que su imagen por f es $L \cap \Delta$.

13. Sea D la región $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ donde a, $b > 0$ y $f\colon D \to \Delta$ la transformación conforme que satisface $f(0) = 0$ y $f'(0) > 0$. Encuentre la imagen de los semiejes de la elipse.

14. Sea D el cuadrado con vértices 1,i, -1 y $-i$ y suponga que $f\colon D \to \Delta$ es conforme y $f(0) = 0$ y $f'(0) < 0$. Encuentre las imágenes de las diagonales de D y de las rectas que unen los puntos medios de las aristas opuestas de D.

15. Sean $D = \{x + iy : 0 < x < a, 0 < y < b\}$ y $D' = \{x + iy : 0 < x < c, 0 < y < d\}$. Pruebe que existe un homeomorfismo $f\colon \overline{D} \to \overline{D'}$ con $f|_D$ conforme y tal que $f(0) = 0$, $f(a) = c$, $f(b) = d$, $f(a + ib) = c + id$ si y solo si $a/b = c/d$.

16. Considere el semi-plano $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ y Q el cuadrado abierto de vértices 0, 1, $1 + i$ e i. Sea $f\colon \overline{H} \to \overline{Q}$ el homeomorfismo con $f|_H$ conforme tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f(\infty) = 1 + i$. Pruebe que f transforma el arco $\{z : |z| = 1\} \cap H$ en la diagonal ente 1 e i. A partir de esto encuentre el punto de H que corresponde al centro de Q.

17. Construya una transformación conforme entre $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ y el rombo que tiene a -1 y 1 como vértices opuestos con ángulo interior en éstos igual a $\alpha\pi$, $0 < \alpha < 1$.

18. Sea P el polígono regular con vértices dados por las raíces n-ésimas de la unidad, $n \geq 3$. Construya f conforme entre el disco $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ y P con $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. ¿Qué puntos de la frontera de Δ corresponden a los puntos medios de las aristas de P?

19. Sea $D = \{x + iy : |x| < 1, |y| < c\}$ donde $c > 0$. Demuestre que existe un único $k \in (0, 1)$ para el cual existe $f\colon H \to D$ conforme, $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, con $f(-1) = 1 + ic$, $f(-k) = -1 + ic$, $f(k) = -1 - ic$ y $f(1) = 1 - ic$. ¿Qué punto de H corresponde al centro de D? ¿Cuánto vale k si $c = 1$?

20. Sea $D \subset \mathbb{C}$ un dominio acotado y (f_n) una sucesión de funciones continuas en $\bar{D}$ y holomorfas en D, convergente uniformemente sobre ∂D. Pruebe que (f_n) converge uniformemente sobre D.

21. Sea $B = \{|z - z_0| < r\}$ y (f_n) una sucesión de funciones continuas en $\bar{B}$ y holomorfas en B. Suponga que existe $\varphi : \partial B \to \mathbb{C}$ continua tal que $f_n(z) \to \varphi(z)$ para todo $z \in \partial B$ y $\int_{\partial B} |f_n - \varphi| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Pruebe que (f_n) converge uniformemente a f sobre compactos de B donde $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{\varphi(w)}{w-z} dw$.