

Guía de ejercicios No. 5

MA36A Funciones de una variable compleja

25 de noviembre de 2007

Prof.: J. Dávila

1. Determine si los siguientes productos convergen o no, y si la convergencia es absoluta.

- a) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2+2n}$, b) $\prod_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n+1}$,
 c) $\prod_{n=1}^{\infty} [1 + (-1)^n n^{-3/2}]$, d) $\prod_{n=1}^{\infty} \cos(1/n)$,
 e) $\prod_{n=1}^{\infty} n^{1/n}$, f) $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n(\log n)^2}\right]$.

2. Determine para cuáles valores de $z \in \mathbb{C}$ el producto siguientes converge:

- a) $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z^n)$,
 b) $\prod_{n=1}^{\infty} z^{1/n}$.

3. Pruebe la identidad

$$\frac{1}{1-z^2} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + z^{2^n}) \quad \forall |z| < 1.$$

4. Muestre que $\prod_{n=2}^{\infty} (1 - n^{-2}) = 1/2$

5. Sea $\lambda > 0$. Muestre que el producto $\prod_{n=2}^{\infty} (1 + (-1)^n n^{-\lambda})$ converge absolutamente cuando $\lambda > 1$, converge cuando $1/2 < \lambda \leq 1$ y diverge cuando $0 < \lambda \leq 1/2$.

Indicación: En el caso $0 < \lambda \leq 1/2$ verifique que:

$$\prod_{n=2}^{2N} (1 + (-1)^n n^{-\lambda}) \rightarrow 0 \text{ si } N \rightarrow \infty$$

6. Muestre que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} \exp(n^{-z} \operatorname{Log}(z))$ converge uniformemente sobre compactos contenidos en $U = \{z : \operatorname{Re}(z) > 1\}$, e identifique la función que este producto define.

7. Suponga que G es un abierto y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en G tales que $f(z) = \prod f_n(z)$ converge uniformemente en compactos de G .

a) Muestre que $\sum_{k=1}^{\infty} \left[f'_k(z) \prod_{n \neq k} f_n(z) \right]$ converge uniformemente en compactos de G y es igual a $f'(z)$.

b) Suponga que f no es idénticamente nula y sea $K \subset G$ un compacto tal que $f \neq 0$ en K . Muestre que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)}$$

y que la convergencia es uniforme en K .

8. Encuentre una función entera tal que $f(n+in) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$. Muestre la más elemental de tales funciones. Ahora realice lo mismo para una función entera que cumpla $f(m+in) = 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$.

9. Muestre que

$$\operatorname{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

10. Obtenga la representación

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}.$$

11. Para $x > 0$, pruebe que:

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\frac{\theta(x)}{12x}}$$

con $0 < \theta(x) < 1$

12. Definamos $\Psi = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$. Pruebe lo siguiente:

- a) Ψ es meromorfa en $\mathbb{C}$ con polos simples en $0, -1, \dots$ y residuos $\text{Res}(\Psi; n) = -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- b) $\Psi(1) = -\gamma$ (la constante de Euler).
- c) $\Psi'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$
- d) $\Psi(1+z) - \Psi(z) = z^{-1}$
- e) $\Psi(1-z) - \Psi(z) = \pi \cot(\pi z)$

13. Sea $f(z) = \Psi(z) + \Psi(z+1/2) - 2\Psi(2z)$ para $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1/2, -1, -3/2, \dots\}$. Pruebe que f es constante y deduzca que $\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = e^{az+b}\Gamma(2z)$. Encuentre a y b y pruebe la fórmula de duplicación de Legendre

$$\Gamma(2z) = \pi^{-1/2} 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma(z+1/2).$$

14. Muestre que el conjunto de los números primos es infinito.

Indicación: Considere la función ζ (zeta de Riemann).

15. Muestre que para $\text{Re}(z) > 1$ se cumplen:

- a) $\zeta^2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^z}$, donde $d(n)$ es el número de divisores de n .
- b) $\zeta(z)\zeta(z-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^z}$, donde $\sigma(n)$ es la suma de los divisores de n