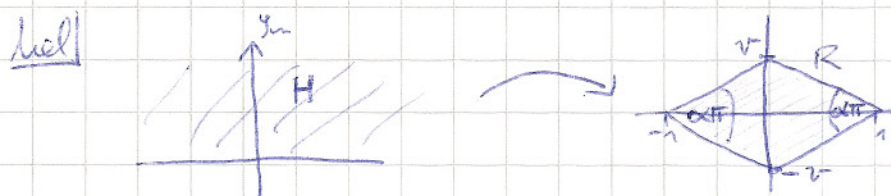


Parte Control 3, Problema 1, parte b...

[P] (1,5 puntos) Utilizando la fórmula de Schwarz-Christoffel encuentre una transformación biholomorfa desde $H = \{ \operatorname{Im}(z) > 0 \}$ al rombo R con vértices $-1, 1$ y ángulos interiores en esos vértices dados por $\pi\alpha$, $0 < \alpha < 1$.



Sean $A = H \cap \{ \operatorname{Re}(z) > 0 \}$ y $B = R \cap \{ \operatorname{Re}(z) > 0 \}$.

Qui, A y B son simplemente conexos. Por Tes. de Riemann, existe un biholomorfismo entre A y B . Aún más, existe un único mapa biholomorfo de A en B , que llamaremos f , continuo hasta el borde, tal que $\tilde{f}(0) = -v$, $\tilde{f}(1) = 1$, $\tilde{f}(\infty) = v$, donde $\tilde{f}: \bar{A} \rightarrow \bar{B}$ es la extensión hasta el borde. // (0.5)

Ahora, A es simétrico con respecto a $\{ \operatorname{Im}(z) > 0 \}$, al igual que B .

Qui, reflejando (por Schwarz) f con respecto a este eje, obtendremos $\tilde{f}: H \rightarrow R$, biholomorfo, continuo hasta el borde, tal que $\tilde{f}(0) = -v$, $\tilde{f}(1) = 1$, $\tilde{f}(\infty) = v$, donde $\tilde{f}$ es su extensión. Por la construcción de $\tilde{f}$, $\tilde{f}(-1) = -1$. // (0.5)

Finalmente, hemos obtenido un biholomorfismo de H en R , tal que su extensión al borde satisface $\tilde{f}(0) = -v$, $\tilde{f}(1) = 1$, $\tilde{f}(-1) = -1$ y $\tilde{f}(\infty) = v$.

Qui, por fórmula de Schwarz-Christoffel, existen a, b constantes, tales que

$$\tilde{f}(z) = a \int_0^z (\eta-1)^{\alpha-1} (\eta+1)^{\alpha-1} \eta^{-\alpha} d\eta + b$$

Obs) También la integral puede haber partido de otro punto en $\mathbb{H} \setminus \{0, \infty\}$

Pero $\tilde{f}(0) = -v = b$

$$\text{y } \tilde{f}(1) = 1 = a \int_0^1 \eta^{\alpha-1} d\eta - v \Rightarrow a = \frac{1+v}{\int_0^1 \eta^{\alpha-1} d\eta}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(z) = \frac{(1+v) \int_0^z (\eta-1)^{\alpha-1} (\eta+1)^{\alpha-1} \eta^{-\alpha} d\eta}{\int_0^1 (\eta-1)^{\alpha-1} (\eta+1)^{\alpha-1} \eta^{-\alpha} d\eta} - v, \text{ cumple lo buscado} // (0.5)$$