MA36A-**Variable Compleja y Funciones Especiales**
Profesor: Juan Dávila
Auxiliares: Julio Backhoff y Omar Larré
Clase auxiliar 13

1. Estudie la convergencia de los siguientes productos:

   a) $\prod_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{n}}$

   b) $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n\{\log(n)\}^2}\right]$

2. **a)** Pruebe que el producto $(1+z+z^2+...+z^9)(1+z^{10}+z^{20}+...+z^{90})(1+z^{100}+z^{200}+...+z^{900})$.... converge uniformemente en compactos contenidos en $B(0,1)$ a la función $\frac{1}{1-z}$.

   b) Pruebe que en $B(0,1)$ se cumple que $(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8).... = \frac{1}{1-z}$ y la convergencia es uniforme en compactos de $B(0,1)$.

3. Suponer $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$, $a_n \to \infty$ y $\{A_n\} \subset \mathbb{C}$ arbitrarios. Muestre usando solamente el teorema de Weierstrass que existe una función entera que interpola esos puntos, es decir, tal que $f(a_n) = A_n \ \forall n$.

   Indicación:Considere g una función entera con ceros simples en los a_n (¿por qué existe?) y estudie la función

   $$\sum_{n \geq 0} g(z) \frac{A_n e^{(\gamma_n(z-a_n))}}{g'(a_n)(z-a_n)}$$

   con γ_n de la forma $\overline{a_n}\beta_n$ convenientes.

4. Suponga $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto y $A \subset \Omega$ sin puntos de acumulación en Ω. Para cada $\alpha \in A$ tomar un entero no negativo $m(\alpha)$ y números complejos $w_{n,\alpha}$, con $0 \leq n \leq m(\alpha)$. Entonces existe una función f holomorfa en Ω satisfaciendo

   $$f^n(\alpha) = n! w_{n,\alpha} \quad \alpha \in A, 0 \leq n \leq m(\alpha)$$

5. Pruebe la **fórmula de duplicación de Legendre**

   $$\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$$