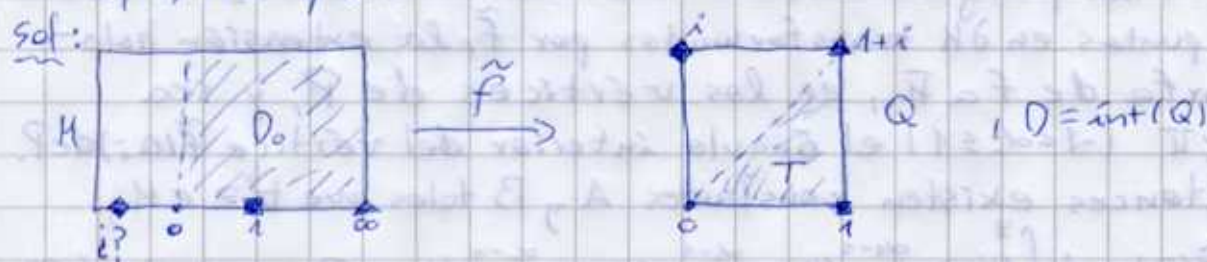


Ej. 2) Determine un mapeo conforme de $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ sobre D , el interior de un cuadrado cerrado Q , de vértices $0, 1, 1+i$ y i .



Por tcs de Riemann, $\exists f: H \rightarrow D$, biholomorfa.

Más aún, podemos tomar $\tilde{f}: H \rightarrow \bar{D}$ extensión holomorfa de f , continua hasta el borde (ver anexo). Además, se puede fijar $\tilde{f}(0)=0$, $\tilde{f}(1)=1$ y $\tilde{f}(\infty)=1+i$, y con esto $\tilde{f}$ resulte ser única (ver anexo).

¿Qué sucede con los puntos en $(0, \infty)$?

Sea $D_0 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$, y T el triángulo de vértices $0, 1$ y $1+i$ (ver dibujos).

Sea g el único mapeo (inyectivo) de D_0 sobre el interior de T cuya extensión holomorfa a $\bar{D}_0$ lleva $\tilde{g}(0)=0$, $\tilde{g}(1)=1$ y $\tilde{g}(\infty)=1+i$ (por razones análogas al caso de f y $\tilde{f}$).

Necesariamente $\tilde{g}$ lleva el eje imaginario positivo en la diagonal de Q de vértices 0 y $1+i$ ($:=I$).

Podemos definir $\tilde{g}$ en $H \setminus D_0$ por el principio de reflexión de Schwarz, reflejando sus imágenes con respecto a I . Por la simetría de Q con respecto a I , se define entonces un homeomorfismo de $\bar{H}$ sobre $\bar{D} = \text{int}(Q)$, que satisface $\tilde{g}(0)=0$, $\tilde{g}(1)=1$, $\tilde{g}(\infty)=1+i$ y $\tilde{g}(-i)=i$ // $\tilde{g}$ resulta inyectiva en H .

Pero $\tilde{f}$ era la única con estas características.

$\Rightarrow \underline{\tilde{f} = \tilde{g}}$. En particular $\tilde{f}(-1)=i$.

Así, por la (FSC),

$$\tilde{f}(z) = A \int_0^z t^{-1/2} (t-1)^{-1/2} (t+1)^{-1/2} dt + B$$