

Teo) Fórmula de Schwarz-Christoffel (FSC)

Sea f mapas conforme de $H = \{ \operatorname{Im}(z) > 0 \}$ sobre $D = \operatorname{int}(P)$, con P un polígono cerrado $\subseteq \mathbb{C}$. Sean $-\infty < a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq \infty$ los puntos en ∂H transformados por $\tilde{f}$, la extensión holomorfe de f a $\bar{H}$, en los vértices de P , y sea $\alpha_i \pi$ ($-1 < \alpha_i \leq 1$) el ángulo interior del vértice $\tilde{f}(a_i)$ de P . Entonces existen constantes A y B tales que $\forall z \in H$,

$$f(z) = A \int_1^z (\eta - a_1)^{\alpha_1 - 1} (\eta - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (\eta - a_n)^{\alpha_n - 1} d\eta + B, \text{ si } a_n \neq \infty$$

$$\text{y } f(z) = A \int_1^z (\eta - a_1)^{\alpha_1 - 1} (\eta - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (\eta - a_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1} d\eta + B, \text{ si } a_n = \infty$$

↖ // así, puede ser cualquier punto en $\bar{H} \setminus \mathbb{R}$

Ej 1 Encuentre un mapas conforme de $H = \{ \operatorname{Im}(z) > 0 \}$ sobre el interior del triángulo de vértices $0, 1$ y c , con $\operatorname{Im}(c) > 0$.



sol: Sean $\alpha\pi$ y $\beta\pi$ los ángulos como en el dibujo. Obtendremos un mapas f de H en D cuya extensión Homeomorfe $\tilde{f}$ a $\bar{H}$ envíe $0, 1$ y ∞ a $0, 1$ y c .

Por el teo. de Riemann, $\exists f: H \rightarrow D$ biholomorfe. Por $\tilde{f}: \bar{H} \rightarrow \bar{D}$ su extensión.

Por (FSC), $\tilde{f}(z) = A \int_0^z \eta^{\alpha-1} (\eta-1)^{\beta-1} d\eta + B$, con A y B constantes.

Como $\tilde{f}(0) = 0 \Rightarrow B = 0$, y como $\tilde{f}(1) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\int_0^1 \eta^{\alpha-1} (\eta-1)^{\beta-1} d\eta}$

Así, un mapas conforme de H sobre D es

$$f(z) = \frac{\int_0^z \eta^{\alpha-1} (\eta-1)^{\beta-1} d\eta}{\int_0^1 \eta^{\alpha-1} (\eta-1)^{\beta-1} d\eta}$$