

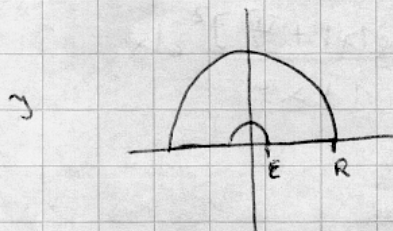
Control 2 - Variable Compleja - 2007.

Punto Pregunta 3

P3)

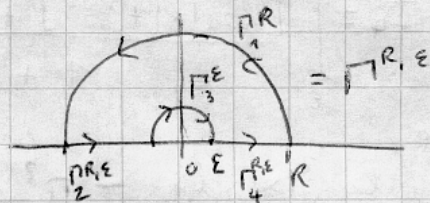
Calcular $\int_0^{\infty} \frac{(\log x)^2}{1+x^2} dx$.

Hint: Considerar $f(z) = \frac{(\log z - \frac{i\pi}{2})^2}{1+z^2}$, con rama en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \cup i$



Sol) llamemos Γ_1^R a $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}^R$, $\Gamma_2^{R,E} \rightarrow$, Γ_3^E a $\overleftarrow{\Gamma}$ y $\Gamma_4^{R,E} \leftarrow$

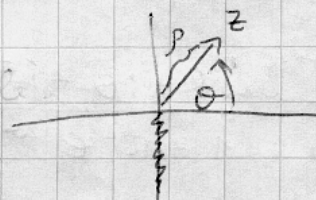
, de modo que $\Gamma^{R,E} = \Gamma_1^R \cup \Gamma_2^{R,E} \cup \Gamma_3^E \cup \Gamma_4^{R,E}$,



posible

Notar que el único polo encerrado por $\Gamma^{R,E}$, si R es suficientemente grande y ϵ chico, es $p = i$.

$f(z) = \frac{[\log(z) - \frac{i\pi}{2}]^2}{(z-i)(z+i)}$. Sin embargo,



y $\log(z) = \log|z| + i \arg(\theta)$, con $\theta \in (-\pi/2, 3\pi/2]$

$\Rightarrow \log(i) = \log 1 + \frac{i\pi}{2} = \frac{i\pi}{2} \Rightarrow [\log(z) - \frac{i\pi}{2}]^2$ tiene un cero

de orden (al menos) dos en $i \Rightarrow f$ es continua en i

$\Rightarrow f$ es analítica en i

(i es una singularidad removible de f).

Ent, $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$, pues f es analítica en el "interior de Γ ". 1. pts
(calcular
residuos en ∞)

$$\text{pero } \int_{\Gamma} f = \int_{\Gamma_1^R} f + \int_{\Gamma_2^{R, \varepsilon}} f + \int_{\Gamma_3^{\varepsilon}} f + \int_{\Gamma_4^{R, \varepsilon}} f = 0$$

Ahora,

$$I_2 = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{[\log|x| + i\pi - \frac{i\pi}{2}]^2}{1+x^2} dx = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{[\log|x| + \frac{i\pi}{2}]^2}{1+x^2} dx = \int_{\varepsilon}^R \frac{[\log|x| + \frac{i\pi}{2}]^2}{1+x^2} dx$$

$$I_4 = \int_{\varepsilon}^R \frac{[\log|x| - \frac{i\pi}{2}]^2}{1+x^2} dx$$

$$\Rightarrow I_2 + I_4 = \int_{\varepsilon}^R \frac{[\log|x| + \frac{i\pi}{2}]^2 + [\log|x| - \frac{i\pi}{2}]^2}{1+x^2} dx = \int_{\varepsilon}^R \frac{2\log^2|x| - \frac{\pi^2}{2}}{1+x^2} dx$$

$$= 2 \int_{\varepsilon}^R \frac{\log^2|x|}{1+x^2} dx - \frac{\pi^2}{2} \arctan(x) \Big|_{\varepsilon}^R \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{\varepsilon \rightarrow 0} 2 \int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2} dx - \frac{\pi^3}{4}$$

1. pts (hacer aparecer
la integral real)

Por otro lado,

$$|I_1| = \left| \int_0^{\pi} \frac{[\log R + i\theta - \frac{i\pi}{2}]^2}{1+R^2 e^{2i\theta}} i R e^{i\theta} d\theta \right| \leq R \int_0^{\pi} \frac{|[\log R + i\theta - \frac{i\pi}{2}]|^2}{|1+R^2 e^{2i\theta}|} d\theta$$

pero $|1+R^2 e^{2i\theta}| \geq |R^2 e^{2i\theta}| - 1 = R^2 - 1 > 0$, as $R > 1$

$\Rightarrow |\log R + i\theta - \frac{i\pi}{2}| \leq \log R + \frac{3\pi}{2} = \log R + \lambda$

$$\Rightarrow |I_1| \leq \frac{R}{R^2-1} \int_0^{\pi} [\log R + \lambda]^2 d\theta = \frac{\pi R [\log R + \lambda]^2}{R^2-1}$$

ahora, $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R [\log R + \lambda]^2}{R^2-1} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{[\log R + \lambda]^2}{R} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2[\log R + \lambda]}{R} = 0$

l'Hôpital

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2}{R} = 0 \quad \text{Ans, } I_1 \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

1.5 pts (acotar este integral y ver que tiende a 0)

Ahora

$$|I_3| = \left| \int_{\pi}^0 \frac{[\log \varepsilon + i\pi - \frac{i\pi}{2}]^2}{1 + \varepsilon^2 e^{2i\theta}} i \varepsilon e^{i\theta} d\theta \right| \leq \frac{\pi \varepsilon [\log(\varepsilon) + \lambda]^2}{1 - \varepsilon^2} \quad \varepsilon < 1$$

, pero $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon [\log(\varepsilon) + \lambda]^2}{1 - \varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon [\log(\varepsilon) + \lambda]^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{[\log(\varepsilon) + \lambda]^2}{1/\varepsilon}$

l'Hôpital

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon [\log(\varepsilon) + \lambda]^2}{1/\varepsilon} = -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{[\log(\varepsilon) + \lambda]}{1/\varepsilon} \stackrel{\text{l'Hôpital}}{=} 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1/\varepsilon}{1/\varepsilon^2} = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon = 0$$

$$\Rightarrow I_3 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

1.5 pts (acotar este integral y ver que tiende a 0)

Como $0 = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, $\forall \varepsilon, \forall R \Rightarrow$ tomando $\varepsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow 0 = 2 \int_0^{\infty} \frac{\log^2(x)}{1+x^2} dx - \frac{\pi^3}{4} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{[\log(x)]^2}{1+x^2} dx = \frac{\pi^3}{8} \quad \begin{array}{l} \text{1 pta} \\ \text{(Concluir)} \end{array}$$

Otra forma:

Considerar Γ como antes, y $f(z) = \frac{[\log(-iz)]^2}{1+z^2}$, en analítica en $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$; con $\log(-i)$ la rama principal.

Ans, $I_2 + I_4 = \int_{-R}^{\varepsilon} \frac{\log(-ix)^2}{1+x^2} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{\log(-ix)^2}{1+x^2} dx$

$$= - \int_{-R}^{\varepsilon} \frac{\log(ix)^2}{1+x^2} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{\log(-ix)^2}{1+x^2} dx = \int_{\varepsilon}^R \frac{\log(-ix)^2 + \log(ix)^2}{1+x^2} dx$$

$$= \int_{\varepsilon}^R \frac{[\log|x| - \frac{i\pi}{2}]^2 + [\log|x| + \frac{i\pi}{2}]^2}{1+x^2} dx = \int_{\varepsilon}^R \frac{2\log^2|x| - \frac{\pi^2}{2}}{1+x^2} dx$$

$$\Rightarrow I_2 + I_1 \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{\xi \rightarrow 0} 2 \int_0^{\infty} \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx - \frac{\pi^2}{2} \arctan(x) \Big|_0^{\infty} = 2 \int_0^{\infty} \frac{\log(x)}{1+x^2} dx - \frac{\pi^2}{4}$$

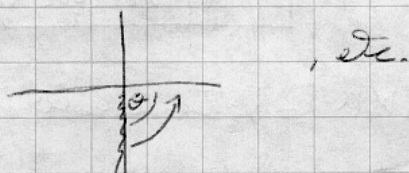
And then, $I_1 \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{} 0$ y $I_2 \xrightarrow[\ell \rightarrow 0]{} 0$ (*)

Then, $2 \int_0^{\infty} \frac{\log(x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi^2}{4}$ y se concluye. //

(*) = se hace $\log(re^{i\theta}) = -\frac{i\pi}{2} + \log(re^{i\theta}) = -\frac{i\pi}{2} + \log(r) + i\theta$ y

se reduce al caso anterior (selección constante).

Observación] Hay más formas de hacerlo, por ejemplo se se mide los ángulos desde el eje $(-\infty, 0)$:



Todas dan el mismo resultado. Solo cambia el hecho de que el residuo en i no es cero.