Pauta Control 2 2007
MA36A Variable Compleja y funciones especiales.

Prof.: Juan Dávila   Aux.: Julio Backhoff , Omar Larré

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y acotado. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analítica tal que para toda sucesión $\{z_n\} \subset \Omega$, $z_n \to z \in \partial\Omega \Rightarrow \limsup |f(z_n)| \leq M$. Probar que $|f| \leq M$ en Ω.

   Si f es constante, es trivial. Supondremos ahora que f no es constante.

   SOLUCIÓN

   Por contradicción, supongamos que existe $z_o \in \Omega$ tal que $|f(z_o)| > M$. Por simplicidad seguiremos denotando por Ω a la componente conexa de este punto.

   Si consideramos $z \in \Omega$, tendremos que la distancia mínima entre $\partial\Omega$ y z, definida por:

$$d(z) = dist(\partial\Omega, z) = \inf\{|a - z| : a \in \partial\Omega\}$$

   es continua (de hecho Lipshitz) y el infimo se alcanza, pues $\partial\Omega$ es compacto (pues Ω es acotado). Así, $U = d^{-1}(\epsilon, \infty) \cap \Omega$ es abierto. Con esto, podemos tomar una sucesión de abiertos $\{U_n\}_n \subset \Omega$, tal que $\sup\{d(z) : z \in \partial U_n\} < \frac{1}{n}$ y $U_n \subset U_{n+1}$, donde $n \geq n_o$, con n_o alguno tal que $z_o \subset U_{n_o}$ (se puede pues Ω es abierto y acotado). Es claro que los puntos en la frontera de estos abiertos se aceran a $\partial\Omega$ tanto como uno quiera (pues es acotado). Así, como para cada n, f es analítica en U_n y continua en $adh(U_n)$, por teorema del módulo máximo, existe $z_n \in \partial U_n$ tal que $\max_{z \in adh(U_n)} |f(z)| = max_{z \in \partial U_n} |f(z)| = |f(z_n)| > |f(z_o)| > M$, pues $z_o \in U_n$. De esta forma, se crea una sucesión $\{z_n\}_n \subset \Omega$ tal que $z_n \to \partial\Omega$. Como $\{z_n\}_n$ es acotada se obtiene una subsucesión (que por simplicidad segimos llamando $\{z_n\}_n$) convergente a un punto en el borde, digamos $z_n \to z \in \partial\Omega$. Además, como $|f(z_n)| > |f(z_o)|$, $\forall n$, ello implica que $\limsup |f(z_n)| \geq |f(z_0)| > M$ que contradice una hipótesis del problema.

2. Sea $f : D \to \mathbb{C}$ analítica, con $D = B(0,1)$. Suponiendo que $f(\frac{1}{2}) = 0 = f(\frac{i}{2})$ y que $|f| \leq 1$ en D, probar que $|f(0)| \leq \frac{1}{4}$ y que esta cota es óptima.

   SOLUCIÓN

   Llamemos $g(z) = \dfrac{z - \frac{1}{2}}{1 - \frac{z}{2}}$ y $h(z) = \dfrac{z - \frac{i}{2}}{1 + \frac{iz}{2}}$, que son funciones de Möbius que dejan el disco en el disco (y su frontera en sí misma). Como $f(\frac{1}{2}) = f(\frac{i}{2}) = g(\frac{1}{2}) = h(\frac{i}{2}) = 0$ tenemos que $l(z) = \frac{f(z)}{g(z)h(z)}$ es analítica en D. Veamos que $|l| \leq 1$ en D. Para ello usamos la P1, tomemos cualquier sucesión $\{w_n\}$ en D, con $w_n \to w \in \partial D$. Luego, como $\frac{1}{g(z)h(z)}$ es continua en una vecindad de ∂D :

$$\limsup |l(w_n)| = \limsup \left|\frac{f(w_n)}{g(w_n)h(w_n)}\right| \leq \limsup \left|\frac{1}{g(w_n)h(w_n)}\right| = \lim \left|\frac{1}{g(w_n)h(w_n)}\right| = 1$$

   De aqui $|l| \leq 1$ en D, y entonces $|f(z)| \leq |g(z)||h(z)|$. Con lo anterior se tiene que $|f(0)| \leq |g(0)||h(0)| = \frac{1}{4}$.

   Para ver que esta cota es óptima, basta ver que se alcanza para alguna función. Tomando $f(z) = g(z)h(z)$, definidas como antes, se verifican las hipótesis.

3. Ver pauta escrita a mano.

4. Muestre que $3z^5 - e^z = 0$ tiene al menos 5 soluciones en $\mathbb{C}$ (contando multiplicidad).

   SOLUCIÓN

   Basta notar que en $\Gamma = \partial\Delta(0,1)$, se tiene que $\left|(3z^5 - e^z) - 3z^5\right| = |e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z} \leq e < 3 = |3z^5|$. Como $(3z^5 - e^z)$ y $3z^5$ son analiticas en $\overline{\Delta(0,1)}$ y $3z^5$ tiene 5 ceros en $\Delta(0,1)$, usando Rouché se concluye lo pedido.

5. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analítica inyectiva. Probar que $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in \Omega$.

SOLUCIÓN

Recordar un corolario del teorema de la aplicación abierta: si $f : U \to \mathbb{C}$ analítica no constante y U un dominio y si $z_o \in U$ es un cero de orden n de $f(z) - f(z_o)$, entonces existe un $r > 0$ y una vecindad V de z_o tal que $\forall w \in B(f(z_o), r), w \neq f(z_o)$, existen n soluciones distintas en V de $f(z) = w$.

Así, razonemos por contradicción. Supongamos que existe $z_o \in \Omega$ tal que $f'(z_o) = 0$. Así, $f(z) - f(z_o)$ tiene un cero de orden al menos 2. Tomemos $W = B(z_o, R)$ de modo que $W \subset \Omega$ (W es un dominio). Como f no puede ser constante por ser inyectiva, y por el corolario antes mencionado, existe una vecindad V de z_o y $r > 0$ tal que la ecuación $f(z) = w$ tiene al menos dos soluciones (donde corresponda). En otras palabras, f no puede ser inyectiva. Esto es una contradicción. Luego, f' no puede anularse en Ω.

6. Considere $f(z) = \exp(z + z^{-1})$

a) Calcule los coeficientes de Laurent de f en $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \infty\}$.

b) Clasifique la singularidad de f en 0, y muestre que

$$Res(0, f) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \frac{1}{(k-1)!}$$

Ind.: Puede ser útil la fórmula integral de los coeficientes de Laurent, o bien puede ser útil considerar que si g, h son analíticas en $A = \{z \in \mathbb{C} : a < |z - z_0| < b\}$, con $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)$ y $h(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)$, entonces la expansión de Laurent de $f = gh$ es $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)$, en donde $c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k}$.

SOLUCIÓN

a)

1° Forma:

Notemos que $f(z) = \exp(z + z^{-1}) = \exp(z)\exp(z^{-1})$. Tomando $g(z) = \exp(z)$ y $h(z) = \exp(z^{-1})$, se tiene que $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z$, y $h(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{z^n}{(-n)!} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z$, es decir:

$$a_n = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{n!} \text{ si } n \geq 0 \\ 0 \text{ si no} \end{array} \right. = \frac{1}{n!} 1_{[0,\infty)}(n)$$

$$b_n = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{(-n)!} \text{ si } n \leq 0 \\ 0 \text{ si no} \end{array} \right. = \frac{1}{(-n)!} 1_{(-\infty,0]}(n)$$

luego

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k!} 1_{[0,\infty)}(k) \frac{1}{(k-n)!} 1_{(-\infty,0]}(n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{(k-n)!} 1_{[0,\infty)}(k-n) \\ &= \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{(k-n)!} \end{aligned}$$

Considerando que $k \geq 0$, si $n \geq 0 \Rightarrow k_0 = n$ mientras que si $n \leq 0 \Rightarrow k_0 = 0$. Luego:

$$c_n = \sum_{k=\max\{0,n\}}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{(k-n)!}$$

2° Forma:

La forma integral de los coeficientes es $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} z^{-n-1}f(z)dz$. En este caso, como $|z| = 1$ es compacto, se puede intercambiar serie con integral y se tiene que

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} z^{-n-1}f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} z^{-n-1}\exp(z)\exp(z^{-1})dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} z^{-n-1}\exp(z)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^k k!}\right)dz \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} z^{-(n+k)-1}\exp(z)dz\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}a_{n+k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{(n+k)!}1_{[0,\infty)}(n+k) \\
&= \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{(k-n)!}\frac{1}{k!}1_{[0,\infty)}(k) \\
&= \sum_{k=\max\{0,n\}}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{(k-n)!}
\end{aligned}
$$

b) Como $c_n > 0$ si $n \leq 0$, entonces la singularidad es esencial. El residuo es:

$$Res(0,f) = c_{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}\frac{1}{k!}$$