Guía de ejercicios No. 3
MA36A Funciones de una variable compleja

Profesor: Juan Dávila

Auxiliares: Julio Backhoff , Omar Larré.

1. Sea f continua en $\mathbb{C}$ y analítica en $\{z \mid Im(z) \neq 0\}$. Pruebe que f es analítica en todo $\mathbb{C}$.

2. Sea D un dominio acotado y $f\colon \overline{D} \to \mathbb{C}$ una función continua, no constante y holomorfa en D. Demuestre que si $|f(z)| = 1$ para todo $z \in \partial D$ entonces existe $z_0 \in D$ tal que $f(z_0) = 0$.

3. Este ejercicio generaliza el anterior. Sea D un dominio acotado y $f\colon \overline{D} \to \mathbb{C}$ una función continua, no constante y holomorfa en D. Demuestre que si $|f(z)| = 1$ para todo $z \in \partial D$ entonces $f(D) = \{|z| < 1\}$. Ind.: considere $g \circ f$ donde g es una transformación biholomorfa apropiada del disco $\{|z| < 1\}$ en si mismo.

4. Sea $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ un polinomio de grado $n \geq 1$ y $K = \{z : |p(z)| = 1\}$. Verifique que K es compacto, y que $U = \mathbb{C} \setminus K$ tiene a lo más $n+1$ componentes conexas. Muestre que si D es una componente conexa acotada de U entonces $p(D) = \{|z| < 1\}$ mientras que si D_0 es la componente no acotada de U entonces $p(D_0) = \{|z| > 1\}$. Pruebe también que si U tiene exactamente $n+1$ componentes conexas, entonces p restringida a cualquiera de las componentes acotadas es inyectiva.

5. Sea $\Delta = \{|z| < 1\}$ y $f\colon \overline{\Delta} \to \mathbb{C}$ una función continua y holomorfa en Δ tal que $|f(z)| = 1$ $\forall z \in \partial\Delta$. Muestre que f tiene la forma

$$f(z) = c \prod_{k=1}^{n} \Big(\frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z} \Big)^{m_k},$$

donde $a_1, \ldots, a_n \in \Delta$, $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ y $|c| = 1$. Ind.: pruebe primero que f tiene una cantidad finita de ceros.

6. Para $|\alpha| < 1$ definamos $b_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$. Verfique que $b'_\alpha(0) = 1 - |\alpha|^2$ y $b'_\alpha(\alpha) = \frac{1}{1-|\alpha|^2}$. Dados $|\alpha|, |\beta| < 1$, encuentre el valor máximo de $|f'(\alpha)|$ cuando f es holomorfa en $\Delta = \{|z| < 1\}$, $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \Delta$ y $f(\alpha) = \beta$. Ind.: considere $b_\beta \circ f \circ b_{-\alpha}$.

7. Sea $\Omega = \{x + iy : |y| < \pi/2\}$ y suponga que f es una función continua en $\overline{\Omega}$, holomorfa en Ω que satisface $|f(z)| \leq 1$ para $z \in \partial\Omega$. Suponga además que existen constantes $0 < \alpha < 1$, $A > 0$ tales que

$$|f(x + iy)| \leq \exp(A e^{\alpha|x|}) \quad \forall x + iy \in \Omega. \tag{*}$$

Demuestre que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \Omega$. Muestre mediante un ejemplo que la conclusión es falsa si f satisface (*) con $\alpha = 1$. Ind.: para $\alpha < \beta < 1$ y $\varepsilon > 0$ sea $h(z) = \exp(-\varepsilon(e^{\beta z} + e^{-\beta z}))$ y aplique el principio del máximo a fh en un rectángulo conveniente.

8. Suponga que $h(z)$ es entera, con $h(0) = 3 + 4i$, y $|h(z)| \leq 5$ si $|z| < 1$. Encuentre el valor de $h'(0)$.

9. Suponga que f es analítica en $H = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 0\}$, y satisface $|f(z)| \leq 1$ para todo z, y que $f(i) = 0$. ¿Cuán grande puede ser $f(2i)$?

10. Sea f analítica en $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Pruebe que existe una sucesión (z_n) en Δ tal que $z_n \to z \in \partial\Delta$ y de manera que $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$ existe (es finito). Para esto, considere los casos en que f tiene infinitos ceros, ninguno o una cantidad finita de estos y concluya.

11. Sea f una función meromorfa en $\mathbb{C}$ tal que $|f(z)| = 1$ para todo $|z| = 1$. Demuestre que f tiene la forma

$$f(z) = c \prod_{k=1}^{r} \Big(\frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z} \Big)^{m_k} \prod_{l=1}^{s} \Big(\frac{1 - \bar{b}_l z}{z - b_l} \Big)^{n_l},$$

donde $a_1, \ldots, a_r$ son los ceros y $b_1, \ldots, b_l$ son los polos de f (con órdenes $m_1, \ldots, m_r$ y $n_1, \ldots, n_s$ respectivamente) en el disco $\{|z| < 1\}$ y $|c| = 1$.

12. Sea f analítica en $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Pruebe que si $f(x) \in \mathbb{R}$, si $x \in (1, \infty)$, entonces $f(x) \in \mathbb{R}$, si $x \in (-\infty, -1)$.

13. Determine la serie de Laurent de f en el anillo indicado:

a) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, $A = \{1 < |z - 2i| < 3\}$, b) $f(z) = \frac{e^{z^2}-1}{z^4}$, $A = \{0 < |z| < \infty\}$,
c) $f(z) = \frac{\mathrm{Log}(z)}{(z-1)^2}$, $A = \{0 < |z - 1| < 1\}$, d) $f(z) = \frac{1}{z^2-4z}$, $A = \{3 < |z - 3i| < 5\}$.

14. Sea $f : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ una función holomorfa no constante. Demuestre que si g tiene una singularidad aislada esencial en $w_0 = f(z_0)$ entonces $g \circ f$ también posee una singularidad esencial en z_0.

15. Sea f una función analítica en el disco $0 < r < r_o$ con serie de Laurent:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z_n$$

tal que existe una constante positiva M satisfaciendo:

$$r^4 \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < \ M, \quad \forall 0 < r < r_o$$

Pruebe que $c_n = 0$, $\forall n < -2$.

16. Sea

$$\cot(\pi z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

la expansión es serie de Laurent para $\cot(\pi z)$ en el anillo $1 < |z| < 2$. Calcule los coeficientes de su parte singular (i.e., los a_n para $n < 0$). Indicación: Recuerde que esta función tiene polos simples en todos los enteros, con residuos π^{-1}.

17. (Números de Bernoulli) Sea $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$ si $z \neq 0$ y $f(0) = 1$. Compruebe que f es meromorfa en $\mathbb{C}$ y encuentre sus polos. Muestre que la serie de Taylor de f en torno a cero tiene la forma

$$f(z) = 1 - \frac{1}{2}z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} B_n z^{2n},$$

donde $B_1, B_2, \ldots$ satisfacen la relación

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{2n+1}{2k} B_k = \frac{2n-1}{2}, \quad \forall n \geq 1.$$

Estos son los llamados números de Bernoulli.

18. Sea $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ y $f(z) = \frac{1}{z^{2p}(e^z-1)}$. Denotemos por Q el cuadrado $\{x + iy : |x| < (2n+1)\pi, |y| < (2n+1)\pi\}$. Muestre que

$$\oint_{\partial Q} f = 2\pi i \Big(\frac{(-1)^{p-1} B_p}{(2p)!} + \frac{2(-1)^p}{(2\pi)^{2p}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2p}} \Big),$$

y concluya que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}} = \frac{(2\pi)^{2p} B_p}{2(2p)!}.$$

En particular, ¿cuánto valen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$?

19. Verifique que:
a) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{a+b\cos\theta}\, d\theta = 2\pi b^{-1}[1 - a(a^2 - b^2)^{-1/2}]$ si $0 < b < a$,
b) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{ai+b\sin\theta} = -2\pi i(a^2 + b^2)^{-1/2}$ si $a > 0$, $b > 0$.

20. Calcule las integrales:
a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{(x^2+\pi^2)^2}$ b) $\int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi x)^2\, dx}{x^2+9}$
c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\mu x)\sin(\nu x)\, dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, donde $0 < \mu \leq \nu$, $0 < a \leq b$, d) $\int_0^{\infty} \frac{x^2\cos(\pi x)^2}{(x^2+1)^2}$.

21. Sea f analítica en un abierto que contiene a $\bar{\Delta} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, con f que satisface $|f(z)| < 1$ para $z \in \partial\Delta$. Muestre que la ecuación $f(z) = z^3$ tiene exactamente tres soluciones (contando multiplicidad) en Δ.

22. Encuentre el número de ceros de $p(z) = z^5+z^3+5z^2+2$ (contando multiplicidad) en el anillo $1 < |z| < 2$.

23. Pruebe que si $1 < \lambda < \infty$, la función $f_\lambda(z) = z + \lambda - e^z$ tiene solo un cero en el semiplano $\mathrm{Re} z < 0$, y este cero está sobre el eje real.

24. Si $|c| > e$, muestre que la ecuación $e^z = cz$ tiene exactamente una solución en el semiplano $A = \{z \in \mathbb{C} : Rez < 1\}$. Ind.: Primero muestre que para $r > 2$ cualquiera, la ecuación tiene sólo una solución en el dominio $A \cap B_r(1)$.

25. Se puede probar que las soluciones reales de la ecuación $\tan z = z$ son de la forma $0, \pm z_1, \pm z_2, \ldots$ donde $k\pi < z_k < (2k+1)\pi/2$.

a) Demuestre que estas son las únicas soluciones de la ecuación anterior en todo el plano complejo. Ind.: considere $Q = \{x+iy : |x| < n\pi, |y| < n\pi\}$ y compare el número de polos y ceros de $\tan z - z$ y z en esta región. Para esto pruebe primero que $|\tan z| \leq 2$ en ∂Q.

b) Calcule $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z_k^2}$. Ind.: considere $\oint_{\partial Q} \frac{1}{z-\tan z} - \frac{1}{z}\, dz$, donde Q es el cuadrado de la indicación anterior.

26. Para $n = 1, 2, \ldots$ sea $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$. Pruebe que si $R > 0$ existe $N(R)$ tal que f_n no tiene ceros en B_R para todo $n \geq N(R)$.

27. Sea $f : B_R(z_0^2) \setminus \{z_0^2\} \to \mathbb{C}$ holomorfa con un polo en $z_0^2 \neq 0$, y $g(z) = f(z^2)z$. Muestre que g tiene un polo en z_0 y que

$$Res(g, z_0) = \frac{1}{2} Res(f, z_0^2).$$

28. Para $n = 1, 2, \ldots$ sea $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$. Pruebe que si $R > 0$ existe $N(R)$ tal que f_n no tiene ceros en B_R para todo $n \geq N(R)$.

29. Calcular:

$$\oint_{|z|=1} sen\left(\frac{1}{z}\right) dz$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-4)(z^3-1)}$$

30. Verificar que para $0 < \alpha < 1$

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2\cos(\alpha\pi/2)}.$$

31. Probar que si $0 < \alpha < 1$ y $b > 0$ entonces

a)

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha (x+b)} = \frac{\pi}{b^\alpha \operatorname{sen}(\alpha\pi)},$$

b)

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha (x+b)^2} = \frac{\alpha\pi}{b^{\alpha+1} \operatorname{sen}(\alpha\pi)},$$

c)

$$\int_0^\infty \frac{\log x\, dx}{x^\alpha (x+b)} = \frac{\pi(\pi \cot(\alpha\pi) + \log b)}{b^\alpha \operatorname{sen}(\alpha\pi)},$$