

Pauta Control 1 2007
MA36A Variable Compleja y funciones especiales.

Prof.: Juan Dávila Aux.: Julio Backhoff , Omar Larré

P1.

- a. (3 puntos) Sea f entera tal que $|f(z)| \leq |\operatorname{Re} z|^{-1/2}$, si z está fuera del eje imaginario. Probar que es constante.

Primera Forma:

Usando la fórmula de Cauchy para f' , se tiene que dado z_o , $f'(z_o) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(w)}{(w-z_o)^2} dw$, donde la integral se hace sobre un cuadrado centrado en el origen y de lado $2l$ suficientemente grande de modo que contenga a z_o . Para las contribuciones de las aristas verticales basta ver que $\frac{1}{|w-z_o|^2} \leq \frac{1}{|l-|\operatorname{Re} z_o||^2}$ y como en ellas $|f(w)| \leq |\operatorname{Re} z|^{-1/2} = l^{-1/2}$, se tiene que cada una aporta a lo más (en módulo) $2l \frac{l^{-1/2}}{|l-|\operatorname{Re} z_o||^2} = \frac{2l^{1/2}}{|l-|\operatorname{Re} z_o||^2} \rightarrow 0$ si $l \rightarrow \infty$. Por otro lado, para las aristas horizontales, se tiene igualmente que $\frac{1}{|w-z_o|^2} \leq \frac{1}{|l-|\operatorname{Im} z_o||^2}$. Además $|f(z)| \leq |\operatorname{Re} z|^{-1/2}$ implica que el módulo de estas integrales se pueda acotar por $\int_{-l}^l \frac{x^{-1/2}}{|l-|\operatorname{Im} z_o||^2} dx = \frac{4l^{1/2}}{|l-|\operatorname{Im} z_o||^2}$, que tiende a cero si $l \rightarrow \infty$. Así, vemos que $f'(z_o) = 0$, $\forall z_o$ y luego la función es constante (\mathbb{C} es conexo).

Segunda Forma:

Si $|\operatorname{Re} z| \geq \frac{1}{2}$, se tiene que $|f(z)| \leq 2^{1/2}$. Sea ahora z con $|\operatorname{Re} z| < \frac{1}{2}$. Consideremos el cuadrado con vértices $i \operatorname{Im} z \pm 1 \pm i$. Por fórmula de Cauchy, $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$, donde la integral es sobre este cuadrado. Para las contribuciones de las aristas verticales (donde $\operatorname{Re} w = \pm 1$), $\frac{1}{|w-z|} \leq 2$ y luego ambas integrales se pueden acotar por 4. Para las integrales horizontales, $\frac{1}{|w-z|} \leq 2^{-1/2}$ y acotándolas (haciendo entrar el módulo a la integral), como $|f(z)| \leq |\operatorname{Re} z|^{-1/2}$, resulta que ambas se acotan por $\int_{-1}^1 2^{-1/2} x^{-1/2} = 4 * 2^{-1/2}$. Con todo lo anterior resulta que f es acotada y como es entera, por Liouville, resulta ser constante.

- b. (3 puntos) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $\varphi : \Omega \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua tal que para todo $t \in [a, b]$ $\varphi(\cdot, t)$ es analítica en Ω . Pruebe que

$$f(z) = \int_a^b \varphi(z, t) dt \quad z \in \Omega$$

es analítica y que

$$f'(z) = \int_a^b \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} dt \quad z \in \Omega.$$

Ind.: utilice la fórmula de Cauchy para representar $\varphi(z, t)$ y luego integre con respecto a t .

Solución

Dado que $[a, b]$ es cerrado y acotado (compacto), no es difícil ver que $f(z) = \int_a^b \varphi(z, t) dt$ es continua en Ω . Como para todo $t \in [a, b]$ $\varphi(\cdot, t)$ es analítica en Ω , para $z \in \Omega$ tomamos $\varepsilon > 0$ tal que $B(z, 2\varepsilon) \subset \Omega$ y usando la fórmula de Cauchy para representar $\varphi(z, t)$, integrando en $\partial B(z, \varepsilon)$ donde $\omega : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ es alguna parametrización regular de $\partial B(z, \varepsilon)$, tenemos:

$$\varphi(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z, \varepsilon)} \frac{\varphi(\omega, t)}{\omega - z} d\omega$$

Entonces:

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_a^b \varphi(z, t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \int_{\partial B(z, \varepsilon)} \frac{\varphi(\omega, t)}{\omega - z} d\omega dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \int_{\partial B(z, \varepsilon)} \frac{\varphi(\omega, t)}{\omega - z} d\omega dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \int_0^1 \frac{\varphi(\omega(\theta), t)}{\omega(\theta) - z} \frac{d\omega(\theta)}{d\theta} d\theta dt \end{aligned}$$

y como $\int_0^1 \frac{f(\omega(\theta))}{\omega(\theta)-z} \frac{d\omega(\theta)}{d\theta} d\theta$ no es más que integrar componente real e imaginaria, usamos Fubini:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \int_0^1 \frac{\varphi(\omega(\theta), t)}{\omega(\theta)-z} \frac{d\omega(\theta)}{d\theta} d\theta dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \int_a^b \frac{\varphi(\omega(\theta), t)}{\omega(\theta)-z} \frac{d\omega(\theta)}{d\theta} dt d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{1}{\omega(\theta)-z} \frac{d\omega(\theta)}{d\theta} \int_a^b \varphi(\omega(\theta), t) dt d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{1}{\omega(\theta)-z} \frac{d\omega(\theta)}{d\theta} f(\omega(\theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z, \varepsilon)} \frac{f(\omega)}{\omega-z} d\omega \end{aligned}$$

dado que f es continua, esta última expresión define una función analítica (teo. visto en clases) con derivada:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z, \varepsilon)} \frac{f(\omega)}{(\omega-z)^2} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z, \varepsilon)} \frac{1}{(\omega-z)^2} \left(\int_a^b \varphi(\omega, t) dt \right) d\omega \\ &= \int_a^b \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z, \varepsilon)} \frac{\varphi(\omega, t)}{(\omega-z)^2} d\omega \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} dt \end{aligned}$$

dado que, como para todo $t \in [a, b]$ $\varphi(\cdot, t)$ es analítica, entonces:

$$\frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z, \varepsilon)} \frac{\varphi(\omega, t)}{(\omega-z)^2} d\omega$$

P3.

a. (1 punto)

Solución

Encuentre una rama de $f(z) = \operatorname{arctgh}(z)$ analítica en $\Omega = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, 1] \cup [1, \infty))$.

Se tiene que $h(z) = \operatorname{tgh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = w$. Así, haciendo $y = e^z$, se obtiene que $y^2 - 1 = wy(y + \frac{1}{y}) \Rightarrow y^2 = e^{2z} = \frac{1+w}{1-w}$, de donde tomando logaritmo se obtiene que

$z = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+w}{1-w} \right)$. Así, $f(w) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+w}{1-w} \right)$ es una candidata a inversa de h (**0.5 pto.**). Trabajando con la rama principal del logaritmo, si queremos que f sea rama de la inversa de h , necesitamos que sea continua. Para esto, no puede ocurrir que $\frac{1+w}{1-w} \in (-\infty, 0]$ en el dominio de f . Esto es, no puede ocurrir que $\frac{1+w}{1-w} = l^2$, para $l \in \mathbb{R}$. Esto se traduce a $w = 1 - \frac{2}{1-l^2}$. Analizando los valores de w que satisfacen esta igualdad (ie, moviendo l en todo \mathbb{R}), vemos que NO puede ocurrir que $w \in \mathbb{R}$ y $|w| \geq 1$. Así, f es rama de la inversa en Ω . Además, f es analítica en Ω por la misma razón que es continua en Ω (analiticidad de log). (**0.5 pto.**)

b. (2 puntos)

Solución

Por regla de la cadena y derivada del cociente, obtenemos que $f'(w) = \frac{1}{1-w^2} = \sum_{k \geq 0} (w^2)^k = \sum_{k \geq 0} w^{2k}$,

si $|w| < 1$ (**0.5 pto.**). Ahora, si consideramos $S(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{w^{2k+1}}{2k+1}$, vemos que su radio de convergencia

es $R=1$. Además $S'(z) = f'(z)$ si $|z| < 1$. Además, $f(0) = 0 = S(0)$. Así, como la bola unitaria abierta es conexa, tenemos que $f = S$ allí **(0.5 pto.)**.

Sea ahora $z = e^{i\theta}$, con $\theta \in [0, 2\pi)$, es decir, z está en el borde del conjunto donde $f(w) = \sum_{k \geq 0} \frac{w^{2k+1}}{2k+1}$.

Tenemos así que $f(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{e^{i\theta(2k+1)}}{2k+1} = L(\theta)$.

Sea $r_k = \frac{1}{2k+1}$ y $a_k = e^{i\theta(2k+1)}$. Así, r_k decrece a 0. Para ver para cuáles ángulos θ , $L(\theta)$ converge usaremos el criterio de Leibniz. Sea $S_n = \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n e^{i\theta(2k+1)} = e^{i\theta} \sum_{k=0}^n e^{i\theta 2k} = e^{i\theta} \sum_{k=0}^n (e^{2i\theta})^k = e^{i\theta} \frac{1 - (e^{2i\theta})^{n+1}}{1 - e^{2i\theta}}$, donde el último paso se tiene siempre y cuando $e^{2i\theta} \neq 1$, que en nuestro caso es cuando $\theta \notin \{0, \pi\}$. Así, $|S_n| \leq \frac{2}{|1 - e^{2i\theta}|}$, que es una cota independiente de n . Así, Leibniz nos dice que $L(\theta)$ converge para $\theta \notin \{0, \pi\}$ **(0.5 pto.)**. Aún más, $L(0) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2k+1}$ y $L(\pi) = \sum_{k \geq 0} \frac{-1}{2k+1}$, y sabemos que ambas series divergen **(0.5 pto.)**.

c. (1 punto)

Solución

Sea $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Así queremos encontrar $\{c_n\}_n \subset \mathbb{C}$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = h(z)g(z)$ en $B(0, R)$ con R tal que ambas series (h y g) converjan. Derivando k veces la ecuación anterior y evaluando en 0 (y ocupando la regla de Leibniz para la derivada del producto) se obtiene que $c_k k! = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} a_n n! b_{k-n} (k-n)! = \sum_{n=0}^k k! a_n b_{k-n}$, de donde $c_k = \sum_{n=0}^k a_n b_{k-n}$. **(1 pto.)**

d. (2 puntos)

Solución

Sea $f(z) = \frac{1}{(z^2 + z - 2)^2}$. Llamemos $g(z) = \frac{1}{(z^2 + z - 2)}$, luego $f = g^2$. Notar que $g = \frac{1}{(z+2)(z-1)}$, pero $\frac{1}{z-1} = -\sum_{k \geq 0} z^k$ y $\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - (-\frac{z}{2})} = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k z^k}{2^k}$, donde la primera igualdad se tiene si $|z| < 1$ y la segunda si $|z| < 2$. Quedémonos con $|z| < 1$. Por producto de Cauchy, $g(z) = -\frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} c_k z^k$, con $c_k = \sum_{l=0}^k \left(\frac{-1}{2}\right)^l = \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{k+1}\right)$ **(1 pto.)** Así, $g(z) = \frac{1}{3} \sum_{k \geq 0} \left(\left(\frac{-1}{2}\right)^{k+1} - 1\right) z^k$. Con esto, por producto de Cauchy, $f(z) = \frac{1}{9} \sum_{k \geq 0} d_k z^k$, con

$$\begin{aligned} d_k &= \sum_{s=0}^k \left(\left(\frac{-1}{2} \right)^{s+1} - 1 \right) \left(\left(\frac{-1}{2} \right)^{k-s+1} - 1 \right) = \sum_{s=0}^k \left(\left(\frac{-1}{2} \right)^{k+2} + 1 - \left(\frac{-1}{2} \right)^{s+1} - \left(\frac{-1}{2} \right)^{k-s+1} \right) \\ &= (k+1) \left(\left(\frac{-1}{2} \right)^{k+2} + 1 \right) + \frac{1}{2} \sum_{s=0}^k \left(\frac{-1}{2} \right)^s + \frac{1}{2} \sum_{s=0}^k \left(\frac{-1}{2} \right)^{k-s} \\ &= (k+1) \left(\left(\frac{-1}{2} \right)^{k+2} + 1 \right) + \sum_{s=0}^k \left(\frac{-1}{2} \right)^s \\ &= (k+1) \left(\left(\frac{-1}{2} \right)^{k+2} + 1 \right) + \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{-1}{2} \right)^{k+1} \right) \end{aligned}$$

(1 pto.)