

Parte P2, Control 1 Var. Complej, 2007

a) • Si  $\operatorname{Re} z \in [a, b]$ , entonces

$$e^a \leq |e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \leq e^b$$

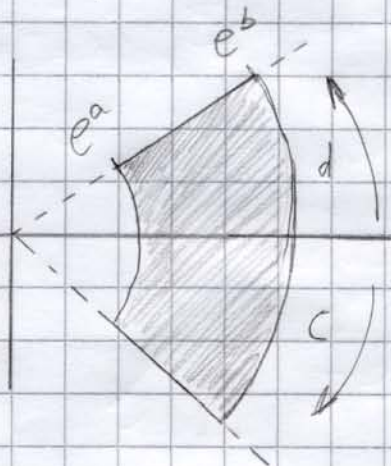
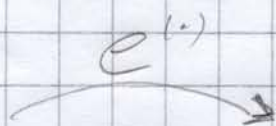
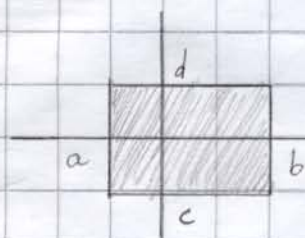
• Si  $\operatorname{Im} z \in [c, d] \subset (-\pi, \pi)$  entonces

$$-\pi < c \leq \operatorname{Arg} e^z = \operatorname{Im} z \leq d < \pi$$

• Luego:

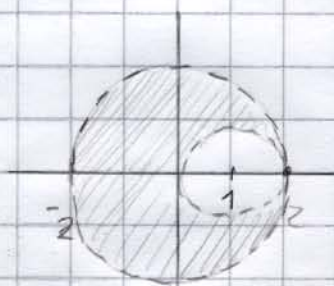
$$\exp([a, b] \times [c, d]) = \{z \in \mathbb{C} \mid e^a \leq |z| \leq e^b, c \leq \operatorname{Arg} z \leq d\}$$

es decir



b)

$R =$



Tomando  $f$  de Möbius tal que

$$f(z) = \infty, \quad f(0) = 1, \quad f(-2) = -1$$

es decir:

$$[f(z), \infty, 1, -1] = [z, 2, 0, -2]$$

$$\Rightarrow \frac{f(z) - \infty}{f(z) - 1} \cdot \frac{-1 - 1}{-1 - \infty} = \frac{z - 2}{z - 0} \cdot \frac{-2 - 0}{-2 - 2}$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{f(z) - 1} = \frac{z - 2}{z} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(z) = \frac{-3z - 2}{z - 2}}$$

• Con esta  $f$  se puede ver que  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$   
(con esto  $f(\Omega)$  es simétrico con respecto a  $\mathbb{R}$ )  
y  $f(\partial\Omega)$  son dos rectas paralelas. Con  
todo lo anterior:

$$f(\Omega) =$$


Considerando  $h(z) = \pi i z$ , se puede ver  
que

$$h(f(\Omega)) = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \text{Im } z < \pi\}$$

y usando la parte (a) se deduce que  
al aplicar la exponencial

$$\exp(h(f(\Omega))) = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z > 0\}$$

Notar que en  $h(f(\Omega))$ ,  $\exp$  es inyectiva.



• Tomando  $g$  de Möbius tal que  $g(-i) = -i$ ,  $g(0) = -1$  y  $g(i) = i$ , es decir:

$$g(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

se tiene que  $g(\exp(h(f(z)))) = \Delta(0,1)$

• Denotando  $\tilde{f}$  la función de Möbius  $h \circ f$ , se tiene que la función requerida es

$$\bar{F} := g \circ \exp \circ \tilde{f}$$

$$F: \Omega \longrightarrow \Delta(0,1)$$

Nota: Las dos funciones de Möbius utilizadas pueden ser diferentes. Lo importante es explicitar la acción sobre los conjuntos y luego encontrarlas explícitamente.