

Guía de ejercicios No. 2

MA36A Funciones de variable compleja

20 de agosto de 2007

Prof.: J. Dávila

Aux.: J. Backhoff, O. Larré

1. Encuentre los discos de convergencia para las series

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sum_{n \geq 1} 3^n n^3 (n!)^3 \frac{z^{3n}}{(3n)!}, & \text{b) } \sum_{n \geq 1} n^{1/n} (z-1)^n, & \text{c) } \sum_{n \geq 1} n^2 (z+2)^{2^n}, \\ \text{d) } \sum_{n \geq 1} n! (z-i)^{n!}, & \text{e) } \sum_{n \geq 2} (\log n)^n (z+1)^{n^2}. \end{array}$$

2. Demuestre el siguiente resultado (criterio de Leibniz): si $(z_n) \subset \mathbb{C}$ es una sucesión cuyas sumas parciales permanecen acotadas, es decir, existe C tal que $|\sum_{n=0}^N z_n| \leq C$ para todo $N \geq 0$, y $(r_n) \subset [0, \infty)$ es una sucesión decreciente con $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} r_n z_n$ converge.

3. Encuentre el radio de convergencia de $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$. Demuestre, usando el ejercicio anterior que esta serie converge para todo z con $|z| = 1$ excepto para $z = 1$, donde diverge. Encuentre una expresión para $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$ en términos de la rama principal de $\log$ válida para $|z| \leq 1$, $z \neq 1$ y calcule $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos n}{n}$ y $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n}$.

4. Obtenga expansiones en serie de potencias alrededor del cero para las siguientes funciones, e indique el mayor disco donde estas expansiones son válidas:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}, & \text{b) } f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^3}, & \text{c) } f(z) = \arctan(z), \\ \text{d) } f(z) = \log(1+z^2), & \text{e) } f(z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right), & \text{f) } f(z) = \frac{1}{(z^2+z-2)^2}. \end{array}$$

En este ejercicio $\log$ denota la rama principal del logaritmo y $\arctan(z) = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$.

5. Pruebe que para cualquier complejo ζ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2\zeta \cos \theta} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta^n}{n!}\right)^2$$

6. Dada f una función real continua definida en $[0, 1]$ muestre que $h(z) = \int_0^1 f(t) \cos(zt) dt$ es entera.

7. Sea $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia R positivo. Verifique que f es par ssi $a_n = 0$ para todo n impar, f es impar ssi $a_n = 0$ para todo n par, y $f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \forall |z| < R$ (esto es, es simétrica con respecto al eje real), ssi $a_n \in \mathbb{R}$ para todo n .

8. Compruebe que la serie $f(z) = \sum_{n \geq 1} z^{n!}$ tiene radio de convergencia 1 y que para todo θ con θ/π racional $\lim_{r \rightarrow 1^-} |f(re^{i\theta})| = \infty$ cuando $r \rightarrow 1^-$.

9. Sea $h(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^{n!}}{n!}$. Demuestre que h es holomorfa en $B(0, 1)$ y tiene una extensión continua a $\overline{B(0, 1)}$, pero que no es posible extenderla de manera holomorfa a ningún conjunto que contenga de manera estricta a $B(0, 1)$. Es decir, si $B(0, 1) \subset D$, $B(0, 1) \neq D$ con D abierto, no existe H holomorfa en D que sea una extensión de h . Ind: si f es holomorfa en un abierto D entonces f' también es holomorfa en D .

10. Suponga que $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$. Para $0 < r < R$ verifique que $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 r^{2n}$. Ind.: $|f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)}$ y recuerde que la convergencia de la serie es uniforme sobre $\{|z| = r\}$.

11. Suponga que $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ tiene radio de convergencia $R \geq 1$ y que f se puede extender a una función continua en $\overline{B(0, 1)}$. Demuestre que $2\pi \sum_{n \geq 0} |a_n|^2$ es una serie convergente y que es igual a $\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta$.

12. Sean $a(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $b(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$, $c(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ series de potencias con radios de convergencia al menos $R > 0$ y considere la ecuación diferencial

$$f'' = a(z)f' + b(z)f + c(z). \quad (*)$$

- a) Suponga que $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$ tiene radio de convergencia positivo y satisface (*). Encuentre una relación de recurrencia para los coeficientes f_n .
- b) Demuestre que si los coeficientes $(f_n) \subset \mathbb{C}$ satisfacen la relación de recurrencia de la parte a), entonces $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$ tiene radio de convergencia al menos R y es una solución de (*).

13. Suponga que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$. Muestre que $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^n}{n!}$ es entera y para $0 < r < R$ existe una constante M tal que $|h(z)| \leq M e^{|z|/r}$.

14. Usando el teorema de Cauchy local calcule

$$\int_{|z|=1} \sqrt{9-z^2} dz, \quad \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2z}, \quad \int_{|z+i|=3/2} \frac{dz}{z^4+z^2}.$$

15. Compruebe que

$$\left| \int_0^{a+ib} \cos(z^2) dz \right| \leq (a^2 + b^2)^{1/2} \frac{\sinh(2ab)}{2ab},$$

para todo $a > 0$, $b > 0$.

16. Sean a, b reales con $a < b$. Pruebe que

$$\int_{c+ia}^{c+ib} e^{-z^2} dz \rightarrow 0 \quad \text{cuando } c \rightarrow \pm\infty.$$

17. Para $b > 0$ muestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos(2\pi b t) dt = \sqrt{\pi} e^{-b^2 \pi^2}.$$

Ind: considere un rectángulo con vértices $-c$, c , $c + b\pi i$, $-c + b\pi i$.

18. Una función entera f se dice de tipo exponencial si existen $A > 0$, $C > 0$ tales que $|f(z)| \leq C e^{A|z|}$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Demuestre que la clase de funciones de tipo exponencial es cerrada bajo diferenciación.

Muestre mediante un ejemplo que la afirmación análoga para funciones $C^\infty(\mathbb{R})$ es falsa.

19. Considere los círculos $C_1 = \partial B_1(1)$ y $C_2 = \partial B_1(-1)$ (con orientación positiva) y definamos la curva $\Gamma = C_1 - C_2$ (con la orientación inducida). Sea

$$h(z) = \frac{e^z}{(z-a)(z-b)}$$

y para $a, b \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ definamos

$$J(a, b) = \int_{\Gamma} h(z) dz.$$

Calcular $\lim_{a, b \rightarrow 0} J(a, b)$ cuando a, b se mantienen en una de las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, por ejemplo cuando $a \in B_1(1)$, $b \in B_1(1)$. ¿Existe el límite $\lim_{a, b \rightarrow 0} J(a, b)$?

20. Pruebe que si f es una función entera y $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \operatorname{Re} f(z) = 0$ entonces $f \equiv ai$ donde $a \in \mathbb{R}$.

21. Sea f una función entera que verifica $|f(z)| \leq C(1 + |z|^m)$ donde $C > 0$ y $m \in \mathbb{N}$. Pruebe que f es un polinomio de grado a lo más m . ¿Qué se puede decir si $m \in \mathbb{R}$? En particular pruebe que si $|f(z)| \leq a\sqrt{|z|} + b$ para todo z , entonces f es constante.

22. Suponga que f es una función entera y que $\sqrt{f}$ también es entera (aquí consideramos $\sqrt{re^{i\theta}} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ para todo $r \geq 0$, $\theta \in (-\pi, \pi]$.) Pruebe que f es constante.

23. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ entera tal que $|f(z)| \leq |Rez|^{-1/2}$ para todo z fuera del eje imaginario. Pruebe que f es constante.

24. Sea $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia igual a 1 y con coeficientes no negativos, es decir $a_n \in \mathbb{R}$, y $a_n \geq 0$ para todo n . Muestre que f no puede tener una extensión holomorfa a ningún abierto que contenga a 1. Ind.: suponiendo que tal extensión existe, mostrar que su desarrollo en serie de potencias en torno a $1/2$ tiene radio de convergencia mayor que $1/2$. Probar entonces que $\sum_{n \geq 0} a_n (1 + \varepsilon)^n$ converge para algún $\varepsilon > 0$.

25. Calcule

- a) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(z)}{z^2}$, b) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(z^{3/2})}{z^2}$ c) $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^{1/z} - z}{z - 1}$,
d) $\lim_{z \rightarrow 0} (e^z - 1)^{-1} - z^{-1}$, e) $\lim_{z \rightarrow 0} (1 + cz)^{1/z}$, donde $c \in \mathbb{C}$.