**Guía de ejercicios No. 1**
**MA36A Funciones de variable compleja**

7 de agosto, 2007 Prof.: J. Dávila

Aux.: J. Backhoff, O. Larré

**1.** Sean $a$,$b \in \mathbb{C}$ tales que $|a| = |b| > 1$ y la sucesión $a^n - b^n$ es acotada. Pruebe que $a = b$.

**2.** Considere $t \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Construya una sucesión $(z_n) \subset \mathbb{C}$ tal que $z_n \to \infty$ y $\mathrm{Re}(z_n^2 + z_n) \to t$. ¿Es posible encontrar una sucesión $(z_n) \subset \mathbb{C}$ de modo que $z_n \to \infty$ y $z_n^2 + z_n \to t$?

**3.** Bosqueje los conjuntos siguientes y determine si son abiertos o cerrados:
a) $\{z^2 : \mathrm{Re}\, z > a\}$, donde $a \geq 0$
b) $\{z : \mathrm{Im}\, z > 0 \text{ o } z^3 = 1\}$
c) $\{z : |z - z_0| \leq 1 \text{ y } |z - z_1| < 1/2\}$, donde $|z_0 - z_1| < 1/2$
d) $\{z : \mathrm{Im}(z^2) > 0 \text{ o } \mathrm{Re}(z^3) < 0\}$

**4.** Sea $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función continua en 0 tal que $f(z + w) = f(z)f(w)$ para todo $z$, $w \in \mathbb{C}$. Pruebe que $f$ es continua en $\mathbb{C}$.

**5.** Definamos $\mathrm{Log}(z) = \log(|z|) + i\theta$ donde $z = |z|e^{i\theta}$ con $\theta \in (-\pi, \pi]$. Probar que $\mathrm{Log}(1 - z^2) = \mathrm{Log}(1 - z) + \mathrm{Log}(1 + z)$ para $|z| < 1$. ¿Qué se puede decir de $\mathrm{Log}((1 - z)/(1 + z))$ para $|z| < 1$?

**6.** Considere un cuadrado en $\mathbb{C}$ y denotemos por $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ sus vértices en orden consecutivo (en sentido antihorario). Pruebe que

$$\frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)} = 2. \tag{1}$$

Pruebe que si $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ son los vértices de un paralelogramo (en orden consecutivo con sentido antihorario) y (1) vale entonces el paralelogramo es un cuadrado. ¿Se puede afirmar lo mismo si se sabe solamente que $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ son los vértices de un cuadrilátero?

**7.** Sea $A = \{z : |z| > 1\}$ y $f\colon A \to \mathbb{C}$ definida mediante $f(z) = \frac{z+z^{-1}}{2}$. Demostrar que $f$ es inyectiva y que su imagen es $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Encuentre la inversa de $f$ sobre $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. ¿Es $f^{-1}$ continua?

**8.** Demuestre que $f(z) = \frac{1-z}{1+z}$ es una biyección entre $\{z : |z| < 1\}$ y el semi-plano $\{z : \mathrm{Re}\, z > 0\}$.

**9.** Considere las $n - 1$ diagonales de un $n$–ágono regular inscrito en un círculo unitario obtenidas conectando un vértice con todos lo demás. Muestre que el producto de los largos de dichas diagonales es $n$. Para esto muestre que las $n$ raíces de 1 (aparte de 1) satisfacen la ecuación "cíclica" $z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1 = 0$.

**10.** Sea $\Sigma$ la esfera de Riemann y $S = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \Sigma : \zeta \geq \zeta_0\}$, donde $0 < \zeta_0 < 1$ y sea $T$ el correspondiente conjunto en $\mathbb{C}$. Muestre que $T$ es el exterior de un círculo centrado en 0.

**11.** Suponga que $z$ es la proyección estereográfica de $(\xi, \eta, \zeta)$ y $\frac{1}{z}$ es la proyección de $(\xi', \eta', \zeta')$.

1. Muestre que $(\xi', \eta', \zeta') = (\xi, -\eta, -\zeta)$.
2. Muestre que la función $\frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C}$, se representa en $\Sigma$ por una rotación de 180° en torno al diámetro de extremos $(-\frac{1}{2}, 0.\frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2}, 0.\frac{1}{2})$.

**12.** Para $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ denotemos por $f_A$ la transformación $f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Pruebe que si $\det A = \det B = 1$ y $f_A = f_B$ entonces $A = B$ o $A = -B$.

**13.** Sean $z_1$, $z_2$, $z_3$ y $z_4$ puntos distintos en $\widehat{\mathbb{C}}$ que pertenecen a un mismo círculo. Pruebe que $z_1$ y $z_3$ separan a $z_2$ y $z_4$ si y sólo si

$$|[z_4, z_3, z_2, z_1]| + |[z_4, z_1, z_2, z_3]| = 1.$$

Ind.: considere primero el caso $z_1 = 0$, $z_3 = 1$, $z_4 = \infty$.

**14.** Construya una transformación de Möbius $f$ tal que a) $f$ transforma $i$ en 1, 1 en $\infty$ e $\infty$ en 1;

b) $f$ transforma $\{|z-i|=1\}$ en $\{w:(1+i)w+(1-i)\bar{w}=0\}$;

c) $f$ transforma $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ en $\{|z|=1\}$ y deja fijo al punto $-1$;

d) $f$ transforma $\{|z|<1\}$ en $\{\operatorname{Im} w>0\}$ y $f(0)=1+2i$;

e) $f$ transforma $\{|z|=1\}$ en si mismo y $\{|z-1/4|=1/4\}$ en $\{|z|=r\}$ para algún $r<1$.

**15.** Encontrar una transformación conforme biyectiva entre la región $D=B_1(0)\cap B_1(i)$ y el semi-plano $\{z\in\mathbb{C}\ /\ Im(z)>0\}$.

Ind.: utilizar una transformación de Möbius $f$ que transforme el arco inferior de la frontera en una recta y analizar que hace $f$ con el arco superior de la frontera. La transformación que se pide no es de Möbius.

**16.** Sea $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ con $ad-bc=1$ y $H=\{\operatorname{Im} z>0\}$. Muestre que $f(H)=H$ si y sólo si $a$, $b$, $c$ y $d$ son reales.

**17.** Sea $D\subseteq\mathbb{C}$ un abierto y $f:D\subseteq\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ diferenciable en el sentido real en todo punto de $D$.

1. Muestre que toda función $T:\mathbb{C}=\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ que sea $\mathbb{R}$-lineal (es decir lineal cuando $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ se considera como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$) puede ser escrita como $T:z\longmapsto Az+B\bar{z}$ para dos números complejos $A$ y $B$. En este contexto verifique que $T$ es $\mathbb{C}$-lineal si y sólo si $B=0$.

   La derivada $f'(z_0)$ puede ser escrita como

   $$f'(z_0):z\longmapsto Az+B\bar{z}.$$

   Escribiremos $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ representando a $A$ y $\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}(z_0)$ representando a $B$ (sólo por notación, no son derivadas parciales).

2. Encuentre una fórmula para $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}(z_0)$ en términos de las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $z_0$. Pruebe además que

   $$\frac{\partial\overline{f}}{\partial z}=\overline{(\frac{\partial f}{\partial\bar{z}})}.$$

3. Muestre que $f$ es analítica en $D$ si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}=0$ en cada punto de $D$.

**18.** Diremos que dos funciones de Möbius $\varphi$ y $\varphi_1$ son "conjugadas"si existe una tercera ($\psi$) tal que $\varphi_1=\psi^{-1}\circ\varphi\circ\psi$. Pruebe que toda $\varphi$ de Möbius con un único punto fijo es conjugada con la función $z\to z+1$. Pruebe que si $\varphi$ tiene dos puntos fijos distintos, entonces es conjugada con la función $z\to\alpha z$, con $\alpha$ complejo. ¿Qué se puede decir sobre $\alpha$ dado $\varphi$?.

**19.** a) Sea $f\colon\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ una biyección continua que transforma círculos en círculos y tal que deja fijos al 0, 1 y $\infty$. Muestre que $f(z)=z$ ó $f(z)=\bar{z}$.

b) Sea $f\colon\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ una biyección continua que transforma círculos en círculos. Muestre que $f$ es Möbius o antiMöbius ($f$ se dice antiMöbius si $f=b\circ\rho$ donde $b$ es Möbius y $\rho(z)=\bar{z}$).