MA36A-**Variable Compleja y Funciones Especiales**
Profesor: Juan Dávila
Auxiliares: Julio Backhoff y Omar Larré
Clase auxiliar 1

1. Sea D el disco unitario en $\mathbb{C}$. Sean $V_1, ..., V_n$ los vértices de un n-ágono regular inscrito en D. Uniendo V_1 al resto de los vértices, se obtienen $n-1$ segmentos de rectas de largo $\lambda_2, ..., \lambda_n$.

   Muestre que:
   $$\prod_{i=2}^{n} \lambda_i = n$$
   Indicación: Considere la función $f(z) = \dfrac{z^n - 1}{z - 1}$ y vea qué sucede para $z = 1$.

2. Sean $z_1, ..., z_n$ números complejos. Pruebe que existe $J \subseteq \{1, ..., n\}$ tal que:
   $$\left| \sum_{j \in J} z_j \right| \geq \frac{1}{4\sqrt[2]{2}} \sum_{j=1}^{n} |z_j|$$

3. Pruebe el "Criterio M de Weierstrass":

   "Sea $\{f_n : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}\}$ una sucesión de funciones contínuas. Si para todo $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}, |f_k(z)| \leq M_k$, y además $\sum M_k$ converge, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ converge a una función f que es contínua."

   Ejemplo: la función $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} kz^k$ es contínua en $B(0, 1/2)$.

4. Pruebe que para todo polinomio no constante P, se cumple $P(z) \to \infty$ si $z \to \infty$.

5. Pruebe que dados $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ distintos entre sí y $w_0, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$ distintos entre sí, se tiene que $[z_0, z_1, z_2, z_3] = [w_0, w_1, w_2, w_3]$ sí y solo si existe f de Möbius tal que $w_j = f(z_j)$, $j = 0, 1, 2, 3$.