

# Introducción

Este apunte fue preparado para servir de apoyo al curso de Variable Compleja y Funciones Especiales de la carrera Ingeniería Civil Matemática de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile. El apunte fue escrito por Aitor Aldunate y Gonzalo Dávila y está basado en el curso dictado por la profesora el año 2004.

En el primer capítulo repasaremos propiedades básicas de los números complejos y topología en  $\mathbb{C}$ . Introduciremos la representación en la esfera de Riemann vía la proyección esterográfica, y estudiaremos las diversas propiedades geométricas de las transformaciones de Möbius.

El segundo capítulo está dedicado a estudiar funciones analíticas, en particular estableceremos la relación entre analiticidad y conformalidad y estudiaremos algunas funciones analíticas elementales, como  $e^z$ ,  $z^n$ ,  $\sin(z)$ ,  $\cos(z)$ . También analizaremos algunas funciones multivaluadas a partir del logaritmo. En este capítulo también estudiaremos funciones definidas por series de potencias.

En el tercer capítulo definimos la integral sobre una curva. También caracterizaremos las funciones analíticas usando el Teorema de Morera y demostraremos la Fórmula de Cauchy. Utilizando estos resultados deduciremos propiedades cualitativas de las funciones analíticas, como el Lema de Schwarz, el Principio del Módulo Máximo, y el Principio de Reflexión de Schwarz.

En el cuarto capítulo estudiaremos el comportamiento de las funciones analíticas con singularidades aisladas, probaremos que es posible expandirlas utilizando una serie de Laurent. En este capítulo demostraremos el Teorema de los Residuos y algunas de sus aplicaciones, como el cálculo de integrales reales, el Principio del Argumento y los Teoremas de Rouché y Hurwitz.

En el capítulo 6 estudiaremos algunas expansiones de funciones analíticas y meromorfas en  $\mathbb{C}$ , en particular la expansión en producto infinito de  $\sin(\pi x)$ . En el siguiente capítulo está dedicado al estudio de las funciones Gamma y Zeta, y sus relaciones con la Fórmula de Stirling y Teoría de números.

El capítulo 8 está abocado al estudio de las funciones armónicas. En particular, resolveremos el problema de Dirichlet en el disco usando la Fórmula de Poisson.

Finalmente, en el capítulo 8 demostraremos el Teorema de Riemann, y describiremos brevemente la forma del mapa de Riemann entre el disco y un polígono a través de la Fórmula de Schwartz-Christoffel.

En cada capítulo de este apunte hay ejercicios resueltos y propuestos de diversa dificultad. Se usaron muchos libros para preparar este apunte, los cuales están descritos en la bibliografía. La profundidad del material presentado muchas veces supera la que es usualmente alcanzada en el

II

curso, por lo cual este apunte es en algunas secciones un apéndice a la clase.

Esperamos que el apunte sea útil y que nos indiquen errores e imprecisiones para poder mejorarlo.

# Índice general

<b>1. Los números Complejos</b>	<b>1</b>
1.1. El plano complejo . . . . .	1
1.2. Representación polar y raíces de los números complejos . . . . .	3
1.3. Esfera de Riemann . . . . .	4
1.4. Transformaciones de Möbius . . . . .	7
1.5. Simetrías . . . . .	14
<b>2. Funciones Analíticas</b>	<b>17</b>
2.1. Las condiciones de Cauchy-Riemann . . . . .	17
2.2. Algunas funciones analíticas . . . . .	22
2.3. Transformaciones conformes . . . . .	25
2.4. Series de potencias . . . . .	29
<b>3. Integrales</b>	<b>39</b>
3.1. Integral de línea . . . . .	39
3.2. Fórmula integral de Cauchy . . . . .	48
3.2.1. Teorema del rectángulo . . . . .	48
3.2.2. Fórmula integral de Cauchy . . . . .	51

3.2.3.	Principio de reflexión de Schwarz . . . . .	55
3.2.4.	Los ceros de las funciones analíticas . . . . .	56
3.3.	Aplicaciones a la Fórmula integral de Cauchy . . . . .	59
3.3.1.	El teorema del módulo máximo . . . . .	59
<b>4.</b>	<b>Funciones Meromorfas</b>	<b>64</b>
4.1.	Dominios simplemente conexos . . . . .	64
4.2.	Series de Laurent . . . . .	68
4.3.	Clasificación de singularidades . . . . .	72
4.4.	Teorema de los residuos y sus consecuencias . . . . .	75
4.4.1.	Función inversa . . . . .	83
4.4.2.	Teorema de Rouché y consecuencias . . . . .	86
4.4.3.	Aplicación del Teorema de los residuos al cálculo de integrales reales . . . . .	91
4.4.4.	Aplicación al cálculo de series . . . . .	103
<b>5.</b>	<b>Fracciones parciales y productos infinitos</b>	<b>108</b>
5.1.	Fracciones parciales . . . . .	108
5.2.	Productos infinitos . . . . .	109
<b>6.</b>	<b>Funciones Especiales</b>	<b>116</b>
6.1.	La Función gamma . . . . .	116
6.1.1.	La fórmula de Stirling . . . . .	121
6.2.	La función zeta de Riemann . . . . .	125
6.2.1.	Extensión de $\zeta(z)$ a todo el plano . . . . .	126
<b>7.</b>	<b>Funciones Armónicas</b>	<b>131</b>

7.1. Propiedades básicas . . . . .	131
7.2. El Teorema del valor medio . . . . .	133
7.3. La fórmula de Poisson . . . . .	134
7.4. El Teorema de Schwarz . . . . .	136
7.5. Principio de reflexión de Schwarz . . . . .	137
<b>8. Teorema de Riemann</b>	<b>139</b>
8.1. El Teorema de Riemann . . . . .	139
8.2. Comportamiento en la Frontera . . . . .	142
8.3. Fórmula de Schwarz-Christoffel . . . . .	142



# Capítulo 1

## Los números Complejos

### 1.1. El plano complejo

El conjunto de los números complejos  $\mathbb{C}$ , está formado por todos los pares ordenados  $(a, b)$  donde  $a$  y  $b$  son números reales con las siguientes operaciones:

1. Suma:  $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$ .
2. Producto:  $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ .

Notemos que el neutro aditivo es  $(0, 0)$  y que  $(1, 0)$  es el neutro multiplicativo.

#### **Ejercicio 1.1.1.**

*Pruebe que  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ , con las operaciones antes mencionadas forman un cuerpo.*

Usando la correspondencia  $(a, 0) \rightarrow a \in \mathbb{R}$  tenemos un isomorfismo entre el subconjunto de los números complejos  $\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$  y  $\mathbb{R}$ , por lo que no haremos distinción de éstos a partir de ahora. Definimos  $i = (0, 1)$  que es la única solución de la ecuación  $(a, b)^2 = (-1, 0)$ .

De ahora en adelante  $(a, b) \equiv a + ib$ . Podemos observar que por la correspondencia con  $\mathbb{R}^2$  tenemos una representación geométrica de los números complejos como vectores en  $\mathbb{R}^2$ . El eje  $\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$  se denominará eje real, y  $\{(0, b) : b \in \mathbb{R}\}$  eje imaginario.

#### **Definición 1.1.1.**

*Para  $z \in \mathbb{C}$  con  $z = a + ib$  definimos las siguientes funciones:*

(i)  $\operatorname{Re} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$  e  $\operatorname{Im} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ , denominadas parte real y parte imaginaria respectivamente, como  $\operatorname{Re}(z) = a$  y  $\operatorname{Im}(z) = b$ . Es decir, las proyecciones de los números complejos en cada uno de los ejes cartesianos.

(ii) Definimos el módulo de  $z$ , que corresponde a la distancia euclídeana del origen  $(0, 0)$  al punto  $z$ , como:

$$|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

(iii) Se define el conjugado de  $z$  que corresponde al punto simétrico de  $z$  con respecto al eje real:

$$\bar{z} = \overline{a + ib} = a - ib.$$

A partir de estas definiciones tenemos un conjunto de propiedades que satisfacen los números complejos:

(i) Sean  $z, w \in \mathbb{C}$ , entonces

$$z^2 + w^2 = (z + iw)(z - iw).$$

(ii) Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a, b \neq 0$ , entonces

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \left( \frac{b}{a^2 + b^2} \right),$$

que es una fórmula explícita para el inverso multiplicativo de  $a + ib$ .

(iii) Sea  $z \in \mathbb{C}$ , entonces

$$|z|^2 = z\bar{z}.$$

En particular, si  $z \neq 0$  entonces

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

(iv)

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \text{y} \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

(v)

$$\overline{(z + w)} = \bar{z} + \bar{w} \quad \text{y} \quad \overline{z\bar{w}} = \bar{z}w,$$

con lo cual es fácil verificar que la función  $z \longrightarrow \bar{z}$  es un automorfismo de cuerpo.

(vi)

$$|zw| = |z||w| \quad \text{y} \quad \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}.$$

(vii)

$$|\bar{z}| = |z|.$$

## 1.2. Representación polar y raíces de los números complejos

### Definición 1.2.1.

Para  $\theta$  real definimos  $e^{i\theta} \equiv \cos \theta + i \sin \theta$ .

Representaremos un complejo,  $z = (a, b) = a + ib$ , en términos de coordenadas  $(r, \theta)$ , donde  $r$  corresponde al módulo de  $z$  y  $\theta$  corresponde al ángulo que forma el segmento que une el origen con el número  $z$  con respecto a la semirecta real positiva, es decir  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ .

### Definición 1.2.2.

Sea  $z \in \mathbb{C}$  con  $z \neq 0$  se define el argumento de  $z$  como:  $\arg\{z\} = \theta$ , donde  $\theta$  es tal que  $z = |z|e^{i\theta}$ , notemos que  $\theta$  está definido módulo  $2\pi$ , y se habla del argumento principal cuando  $\theta \in (-\pi, \pi]$ . A partir de ahora en toda igualdad que incluya  $\arg$  quedará implícito que es una igualdad mod  $2\pi$ .

Con ésta definición del argumento de  $z$  tenemos que

$$\arg\{z_1 z_2\} = \arg\{z_1\} + \arg\{z_2\},$$

e inductivamente se puede probar fácilmente que

$$\arg\{z_1 z_2 \dots z_n\} = \arg\{z_1\} + \arg\{z_2\} + \dots + \arg\{z_n\}.$$

Por lo tanto

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\arg\{z_1\} + \arg\{z_2\})},$$

y también

$$z^n = |z|^n e^{in \arg\{z\}}.$$

Para cualquier número entero  $n \geq 1$  y un número complejo dado  $a \neq 0$ , se puede resolver la ecuación  $z^n = a$ . De hecho, si  $a = |a|e^{i \arg\{a\}}$  obtenemos que

$$z = |a|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\arg\{a\} + 2k\pi}{n}}, \text{ con } k = 0, 1, \dots, n-1,$$

son todas soluciones de  $z^n = a$ . Las soluciones de la ecuación  $z^n = 1$  son denominadas raíces de la unidad.

Consideramos a  $\mathbb{C}$  como un espacio topológico con la topología usual de  $\mathbb{R}^2$  dada por el módulo. Definimos el disco de centro  $z_0$  y radio  $r$  como

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

Los discos cerrados los expresaremos como las clausuras de los discos abiertos:

$$\overline{D(z_0, r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}.$$

Conviene extender el plano complejo  $\mathbb{C}$  añadiéndole el punto infinito, el cual denotaremos por  $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . En  $\mathbb{C}_\infty$  los entornos abiertos de  $\infty$  son los complementos de los conjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ , y  $\mathbb{C}_\infty$  resulta ser un espacio compacto. Representaremos  $\mathbb{C}_\infty$  a través de la Esfera de Riemann.

### 1.3. Esfera de Riemann

#### Definición 1.3.1.

Sea  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\mathbb{C}$ , diremos que  $z_n \rightarrow \infty$  si  $|z_n| \rightarrow \infty$ .

#### Definición 1.3.2.

Se define la Esfera de Riemann como la esfera unitaria

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Existe una correspondencia biyectiva entre  $\mathbb{C}$  y  $S \setminus \{(0, 0, 1)\}$  la cual viene dada por lo que se llama proyección esterográfica.  $\mathcal{P} : \mathbb{C} \rightarrow S \setminus \{(0, 0, 1)\}$  dada por

$$\mathcal{P}(z) = \left( \frac{2}{|z|^2 + 1} \operatorname{Re} z, \frac{2}{|z|^2 + 1} \operatorname{Im} z, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

Cuando  $z \rightarrow \infty$  se cumple que  $\mathcal{P}(z) \rightarrow (0, 0, 1)$  lo cual permite dar un sentido preciso a  $z = \infty$ . Si  $N = (0, 0, 1)$  y representamos  $z = (x_1, x_2, 0)$  entonces  $\mathcal{P}(z)$  la proyección esterográfica de  $z$  corresponde al punto de intersección de la recta que une a  $N$  con el punto  $z$  contenido en el plano  $\{x_3 = 0\}$ .

Así tenemos que  $\mathcal{P}(\mathbb{C}) = S \setminus \{(0, 0, 1)\}$ , y podemos escribir  $\mathcal{P}(\infty) = (0, 0, 1)$ .

#### Proposición 1.3.1.

$\mathcal{P}^{-1} : S \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  está dada por

$$\mathcal{P}^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1 - x_3} + i \frac{x_2}{1 - x_3} \quad \mathcal{P}^{-1}(0, 0, 1) = \infty.$$

#### Ejercicio 1.3.1.

- (i) Demuestre que  $z, z' \in \mathbb{C}$  corresponden a puntos diametralmente opuestos en la esfera  $S$  si y solamente si  $z\bar{z}' = -1$ .

(ii) Sea  $(x_1, x_2, x_3) = \mathcal{P}(z)$ , demuestre que:

- a)  $x_3 < 0$  corresponde a  $|z| < 1$ .
- b)  $x_3 > 0$  corresponde a  $|z| > 1$ .
- c)  $x_3 = 0$  corresponde a  $|z| = 1$ .

**Definición 1.3.3.**

Un círculo en  $S$  está dado por la intersección

$$\{Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D\} \cap S.$$

Notemos que sin pérdida de generalidad podemos suponer  $A^2 + B^2 + C^2 = 1$  y  $0 \leq D < 1$ .

**Proposición 1.3.2.**

Sea  $\mathcal{C}$  un círculo en  $S$  y  $T = \mathcal{P}^{-1}(\mathcal{C} \setminus \{(0, 0, 1)\})$ , luego

- (a) Si  $\mathcal{C}$  contiene a  $(0, 0, 1)$ , entonces  $T$  es una recta.
- (b) Si  $\mathcal{C}$  no contiene a  $(0, 0, 1)$ , entonces  $T$  es una circunferencia.

Recíprocamente si  $T$  es una recta o una circunferencia en  $\mathbb{C}$ , entonces  $\mathcal{C} = \mathcal{P}(T)$  es un círculo en  $S$ , el cual contiene a  $(0, 0, 1)$  si y sólo si  $T$  es una recta.

**Demostración:**

Sea  $\mathcal{C} = \{Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D\} \cap S$  un círculo en  $S$ , y  $z \in \mathcal{P}^{-1}(\mathcal{C})$ , entonces

$$\frac{2A}{|z|^2 + 1} \operatorname{Re} z + \frac{2B}{|z|^2 + 1} \operatorname{Im} z + C \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} = D,$$

luego

$$2A \operatorname{Re} z + 2B \operatorname{Im} z + (C - D)|z|^2 = D + C. \tag{1.1}$$

Ahora tenemos que si  $C = D$ , (1.1) es la ecuación de una recta, pero  $C = D$  es equivalente a que  $(0, 0, 1) \in \mathcal{C}$ .

Si  $C \neq D$ , entonces (1.1) es la ecuación de una circunferencia. Queda propuesto al lector demostrar la recíproca. ■

### Conformalidad de la proyección estereográfica

#### Teorema 1.3.1.

El ángulo entre dos curvas en  $\mathbb{C}$  es igual si y sólo si el ángulo entre las proyecciones de esas dos curvas en  $S$  es igual.

#### Observación 1.3.1.

Esta propiedad quiere decir que la proyección estereográfica preserva ángulos, su magnitud y sentido. Cualquier función que cumpla esta propiedad se dirá conforme.

#### Demostración:

Sean  $(\varphi_1(t), \gamma_1(t), \eta_1(t))$ ,  $(\varphi_2(t), \gamma_2(t), \eta_2(t))$  dos curvas en  $S$ , tales que  $\|(\varphi'_k, \gamma'_k, \eta'_k)\| \neq 0$  para  $k = 1, 2$ . Notemos que

$$\varphi_1^2 + \gamma_1^2 + \eta_1^2 = 1 \text{ y } \varphi_2^2 + \gamma_2^2 + \eta_2^2 = 1,$$

pues las curvas están en  $S$ .

Supongamos que existe un  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que

$$\vec{x}^* = (\varphi_1(t_0), \gamma_1(t_0), \eta_1(t_0)) = (\varphi_2(t_0), \gamma_2(t_0), \eta_2(t_0)) \neq (0, 0, 1).$$

El ángulo  $\alpha$  entre las dos curvas por definición es tal que

$$\cos \alpha = \frac{\langle (\varphi'_1(t_0), \gamma'_1(t_0), \eta'_1(t_0)), (\varphi'_2(t_0), \gamma'_2(t_0), \eta'_2(t_0)) \rangle}{\sqrt{\varphi_1'^2(t_0) + \gamma_1'^2(t_0) + \eta_1'^2(t_0)} \sqrt{\varphi_2'^2(t_0) + \gamma_2'^2(t_0) + \eta_2'^2(t_0)}}.$$

Ahora, recordemos que

$$\mathcal{P}^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1 - x_3} + i \frac{x_2}{1 - x_3},$$

entonces las imágenes correspondientes en  $\mathbb{C}$  son

$$\vec{z}_1(t) = \frac{\varphi_1(t)}{1 - \eta_1(t)} + i \frac{\gamma_1(t)}{1 - \eta_1(t)},$$

$$\vec{z}_2(t) = \frac{\varphi_2(t)}{1 - \eta_2(t)} + i \frac{\gamma_2(t)}{1 - \eta_2(t)},$$

con lo que

$$\vec{z}'_1(t) = \frac{\varphi'_1(t)(1 - \eta_1(t)) + \eta'_1(t)\varphi_1(t) + i\{\gamma'_1(t)(1 - \eta_1(t)) + \gamma_1(t)\eta'_1(t)\}}{(1 - \eta_1(t))^2},$$

y

$$\vec{z}'_2(t) = \frac{\varphi'_2(t)(1 - \eta_2(t)) + \eta'_2(t)\varphi_2(t) + i\{\gamma'_2(t)(1 - \eta_2(t)) + \gamma_2(t)\eta'_2(t)\}}{(1 - \eta_2)^2},$$

pero tenemos que

$$\varphi_k\varphi'_k + \eta_k\eta'_k + \gamma_k\gamma'_k = 0,$$

pues por (1.3) tenemos que es la derivada de una constante. Calculemos  $\langle z'_1(t_0), z'_2(t_0) \rangle$ , y para ello recordemos que  $\eta_1(t_0) = \eta_2(t_0)$ ,  $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$  y  $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ . Entonces

$$\langle z'_1(t_0), z'_2(t_0) \rangle = \frac{\varphi'_1(t_0)\varphi'_2(t_0) + \gamma'_1(t_0)\gamma'_2(t_0) + \eta'_1(t_0)\eta'_2(t_0)}{(1 - \eta_1(t_0))^2}.$$

Veamos ahora que pasa con  $|z'_1(t)|$ , para ello ocupemos (1.3),

$$\begin{aligned} |z_1(t)| &= \frac{[\varphi'_1(t)(1 - \eta_1(t)) + \eta'_1(t)\varphi_1(t)]^2 + [\gamma'_1(t)(1 - \eta_1(t)) + \eta'_1(t)\gamma_1(t)]^2}{(1 - \eta_1(t))^4} \\ &= \frac{\gamma_1'^2(t) + \varphi_1'^2(t) + \gamma_1'^2(t)}{(1 - \eta_1(t))^2}. \end{aligned}$$

De aquí se concluye. ■

### Ejercicio 1.3.2.

- (i) Sean  $L_1, L_2$  dos rectas en  $\mathbb{C}$ ,  $\{z_0\} = L_1 \cap L_2$ ,  $\mathcal{P}(L_1), \mathcal{P}(L_2)$  se intersectan en  $\mathcal{P}(z_0)$  y en  $(0, 0, 1)$ . Pruebe que los ángulos en  $(0, 0, 1)$  y en  $\mathcal{P}(z_0)$  son iguales.
- (ii) Sean  $L_1, L_2$  dos rectas paralelas en  $\mathbb{C}$ , pruebe que  $\mathcal{P}(L_1), \mathcal{P}(L_2)$  son dos círculos que se intersectan en  $(0, 0, 1)$  de manera tangente.

## 1.4. Transformaciones de Möbius

Estudiaremos las transformaciones de Möbius, las cuales tienen diversas propiedades geométricas que las hacen interesantes como para considerarlas en una sección aparte.

### Definición 1.4.1.

Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  con  $ad - bc \neq 0$ . Definimos la transformación de Möbius  $M(z)$  como

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Notar que si  $ad - bc = 0$  entonces  $M(z)$  es constante.

Esta función puede ser extendida a  $\mathbb{C}_\infty$  de manera natural como

$$M(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} M(z) = \frac{a}{c}.$$

La función  $M$  tiene una inversa dada por

$$M^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a},$$

con lo que tenemos que  $M^{-1}$  es también una transformación de Möbius y  $M^{-1}(\infty) = -d/c$ .

**Proposición 1.4.1.**

*La composición de transformaciones de Möbius es también una transformación de Möbius.*

**Demostración:**

Sean  $f, g : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  dos transformaciones de Möbius,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad g(z) = \frac{rz + s}{tz + u},$$

luego

$$\begin{aligned} f \circ g(z) &= f\left(\frac{rz + s}{tz + u}\right) \\ &= \frac{a\left(\frac{rz+s}{tz+u}\right) + b}{c\left(\frac{rz+s}{tz+u}\right) + d} \\ &= \frac{arz + as + btz + bu}{crz + cs + dtz + du} \\ &= \frac{(ar + bt)z + (as + bu)}{(cr + dt)z + (cs + du)}. \end{aligned}$$

Ahora falta probar que

$$(ar + bt)(cs + du) - (as + bu)(cr + dt) \neq 0,$$

para ello ocuparemos que  $ad - bc \neq 0$  y  $ru - st \neq 0$ , pues  $f, g$  son transformaciones de Möbius.

$$\begin{aligned} (ar + bt)(cs + du) - (as + bu)(cr + dt) &= arcs + ardu + btcs + btdu \\ &\quad - ascr - astd - bucr - budt \\ &= ardu + btcs - asdt - bucr \\ &= ad(ru - st) - bc(ur - ts) \\ &= (ad - bc)(ru - st) \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Con lo que se concluye la demostración. ■

Con ésto tenemos que las transformaciones de Möbius forman un grupo.

**Definición 1.4.2.**

*Definiremos las siguientes transformaciones elementales:*

(i) *Traslación paralela:*

$$f(z) = z + a, \quad a \in \mathbb{C}.$$

(ii) *Homotecia:*

$$f(z) = kz, \quad k > 0, k \in \mathbb{R}.$$

(iii) *Rotación:*

$$f(z) = e^{i\theta} z, \quad \theta \text{ fijo.}$$

(iv) *Inversión:*

$$f(z) = \frac{1}{z}.$$

**Ejercicio 1.4.1.**

*Demuestre que toda transformación de Möbius es una composición de (i), (ii), (iii), (iv).*

**Teorema 1.4.1.**

*La imagen de una recta o de una circunferencia por una transformación de Möbius es una recta o una circunferencia.*

**Demostración:**

El teorema no afirma que la imagen de una recta sea una recta ni que la de una circunferencia sea una circunferencia, sino que las rectas pueden ser transformadas en circunferencias o rectas y viceversa.

Sea  $\mathcal{C}$  la circunferencia de centro  $z_0 = (a, b)$  y radio  $r > 0$ , es decir:

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{C} : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}.$$

Desarrollando y multiplicando por un número  $A \neq 0$  arbitrario tenemos:

$$A(x^2 + y^2) - 2Aax - 2Aby + A(a^2 + b^2 - r^2) = 0,$$

luego las circunferencias son los conjuntos de puntos que cumplen una ecuación del tipo

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0, \tag{1.2}$$

donde  $A \neq 0$  y  $B^2 + C^2 - AD > 0$  (ya que  $B^2 + C^2 - AD = A^2 r^2$ ). Recíprocamente, el conjunto de puntos que cumple una ecuación de estas condiciones es una circunferencia.

Por otra parte si  $A = 0$  la ecuación se reduce a  $2Bx + 2Cy + D = 0$ , la cual si  $(B, C) \neq 0$ , es la ecuación de una recta.

En resumen, las circunferencias y rectas son los puntos que satisfacen una ecuación del tipo (1.2), donde  $A \neq 0$  y  $B^2 + C^2 - AD > 0$  o  $A = 0$  y  $(B, C) \neq 0$ .

Si consideramos  $(x, y)$  como un número complejo  $z$ , entonces (1.2) equivale a

$$Az\bar{z} + \bar{E}z + E\bar{z} + D = 0, \quad (1.3)$$

donde  $E = B + Ci$ , y las condiciones sobre los coeficientes son  $A = 0$  y  $E \neq 0$  o bien  $A \neq 0$  y  $E\bar{E} - AD > 0$ .

Convendremos en que  $\infty$  pertenece a cualquier recta y no pertenece a ninguna circunferencia, luego una recta es un conjunto de números complejos determinados por una ecuación del tipo (1.3) con  $A = 0$  más el punto  $\infty$  y una circunferencia es un conjunto de números complejos determinados por una ecuación de tipo (1.3) con  $A \neq 0$ .

Consideremos en primer lugar la función  $M(z) = \frac{1}{z}$ . El conjunto de los números complejos  $z \neq 0$  que cumplen la ecuación (1.3) se transforma en el conjunto de los números complejos no nulos que cumplen

$$A\frac{1}{z\bar{z}} + \bar{E}\frac{1}{z} + E\frac{1}{\bar{z}} + D = 0,$$

es decir

$$Dz\bar{z} + Ez + \bar{E}\bar{z} + A = 0.$$

Si  $A \neq 0$  y  $D \neq 0$  (con lo que  $z = 0$  no cumple (1.2)) tenemos que el conjunto inicial era una circunferencia y su imagen también. Si  $A \neq 0$  pero  $D = 0$  entonces el conjunto inicial era una circunferencia y el final es una recta,  $z = 0$  pertenecía a la circunferencia y su imagen es  $\infty$ , que pertenece a la recta.

Si  $A = 0$  y  $D \neq 0$  tenemos una recta que no pasa por 0 y se transforma en una circunferencia. El 0 está en la imagen porque es la imagen de  $\infty$ , que estaba en la recta. Finalmente si  $A = D = 0$  tenemos una recta que pasa por el origen y que se transforma en otra recta que pasa

por el origen (de modo que 0 y  $\infty$  se intercambian).

Así el teorema es cierto para la función  $\frac{1}{z}$ . Claramente el resultado es válido para una función de la forma  $M(z) = az + b$ .

En el caso general expresamos

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)}, \text{ con } c \neq 0,$$

por lo que  $M$  es una composición de transformaciones de Möbius elementales, y es fácil concluir que el resultado es cierto. ■

**Ejercicio 1.4.2.**

*Encuentre una fórmula para  $\mathcal{P}^{-1} \circ \frac{1}{z} \circ \mathcal{P}$ , y demuestre el teorema anterior de manera alternativa.*

**Teorema 1.4.2.**

*Las transformaciones de Möbius preservan ángulos, es decir, son conformes.*

**Demostración:**

Por el Teorema 1.3.1 y el ejercicio 1.4.1 basta probar que  $1/z$  preserva ángulos, lo cual se propone al lector. ■

**Proposición 1.4.2.**

*Toda transformación de Möbius  $M$  deja fijo al menos un punto de  $\mathbb{C}_\infty$ . Si  $M$  no es la identidad entonces tiene a lo sumo dos puntos fijos.*

**Demostración:**

Sea

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Si  $c = 0$  entonces se cumple  $M(\infty) = \infty$ , luego  $M$  tiene un punto fijo. Si  $a = d$  entonces  $\infty$  es el único punto fijo, y si  $a \neq d$ ,  $z = \frac{b}{d-a}$  es otro punto fijo, luego en total hay a lo sumo dos puntos fijos. Ahora supongamos  $c \neq 0$ , con lo que  $M(\infty) = \frac{a}{c} \neq \infty$ . Tampoco lo es el punto  $-\frac{d}{c}$ , pues su imagen es  $\infty$ . Entre los puntos restantes, la ecuación  $M(z) = z$  equivale a

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0,$$

que tiene una o dos soluciones en  $\mathbb{C}$ . ■

**Observación 1.4.1.**

Con esta proposición tenemos que si una transformación de Möbius tiene tres puntos fijos entonces es la identidad.

**Ejercicio 1.4.3.**

- (i) Pruebe que toda transformación de Möbius con sólo un punto fijo  $z_1 \in \mathbb{C}$  se puede escribir como:

$$\frac{1}{w - z_1} = \frac{1}{z - z_1} + b, \quad b \neq 0, b \in \mathbb{C}.$$

- (ii) Demuestre que toda transformación de Möbius  $w = L(z)$  con dos puntos fijos  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  se puede escribir como:

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = a \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

- (iii) Si una transformación de Möbius  $L$  tiene dos puntos fijos  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  pruebe que

$$L'(z_1)L'(z_2) = 1.$$

**Teorema 1.4.3.**

Si  $z_1, z_2, z_3$  son tres números distintos en  $\mathbb{C}_\infty$  y  $w_1 = 0, w_2 = \infty, w_3 = 1$  existe una única transformación de Möbius  $M$  que cumple  $M(z_1) = w_1, M(z_2) = w_2, M(z_3) = w_3$ .

**Demostración:**

La unicidad es consecuencia del Teorema 1.4.2. Supongamos que  $z_1, z_2, z_3$  son finitos. Es claro que  $M$  debe ser de la forma

$$M(z) = K \frac{z - z_1}{z - z_2},$$

y con la condición  $M(z_3) = 1$

$$K = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1},$$

por lo tanto

$$M(z) = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

■

**Definición 1.4.3.**

Se define la razón cruzada  $(z, z_1, z_2, z_3)$  por

$$(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

**Ejercicio 1.4.4.**

Sean  $z_1, z_2, z_3, z_4$  distintos en  $\mathbb{C}$ , pruebe que  $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$  si y sólo si  $z_1, z_2, z_3, z_4$  están en un círculo o en una recta.

**Proposición 1.4.3.**

Sean  $z_1, z_2, z_3, z_4$  puntos distintos, y  $T$  una transformación de Möbius, entonces

$$(Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

**Demostración:**

Sea  $M(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$ , tenemos entonces que:

$$M \circ T^{-1}(Tz_2) = 0, \quad M \circ T^{-1}(Tz_3) = \infty, \quad M \circ T^{-1}(Tz_4) = 1,$$

entonces

$$M \circ T^{-1}(z) = (z, Tz_2, Tz_3, Tz_4),$$

y por lo tanto

$$(Tz, Tz_2, Tz_3, Tz_4) = M \circ T^{-1}(Tz) = M(z) = (z, z_2, z_3, z_4).$$

■

Con ésto tenemos una representación explícita para la Transformación de Möbius  $T$  que lleva  $z_1 \sim w_1, z_2 \sim w_2, z_3 \sim w_3$ :

$$(Tz, w_1, w_2, w_3) = (z, z_1, z_2, z_3).$$

**Observación 1.4.2.**

La razón cruzada preserva orientación en el sentido que muestra la figura.

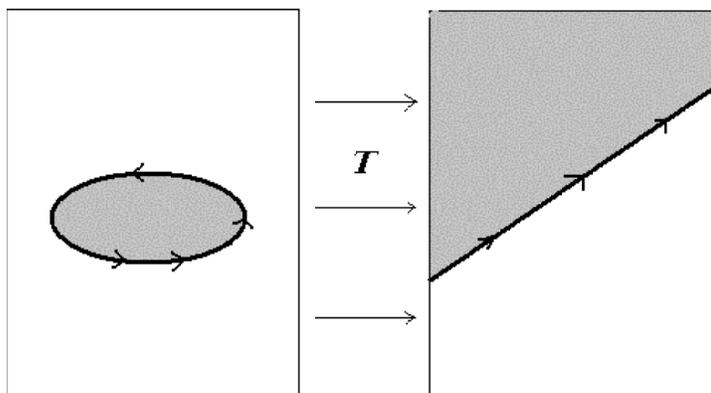


Figura 1.1: Preservación de orientación de las transformaciones de Möbius

**Ejemplo 1.4.1.**

Encontrar una transformación de Möbius  $T$  que cumple  $T\{\text{Im } z > 0\} = D(0, 1)$ .

**Solución:**

Vamos a tomar los puntos  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = 0$ ,  $z_3 = 1$ , queremos encontrar la transformación  $T$  tal que  $T(-1) = 1$ ,  $T(0) = i$ ,  $T(1) = -1$ , y así  $(Tz, 1, i, -1) = (z, -1, 0, 1)$ . Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1+i}{1-i} \frac{Tz-i}{Tz+1} &= \frac{-1-i}{-1-i} \frac{z-0}{z-1} \\ &= \frac{-2z}{1-z} \\ &= \frac{2z}{z-1}. \end{aligned}$$

Así

$$Tz = \frac{z-i}{iz-1}.$$

## 1.5. Simetrías

Si  $L = \{\text{Im } z = 0\}$ , el punto simétrico de  $z$  con respecto a  $L$  es  $\bar{z}$ .

**Definición 1.5.1.**

Sea  $\mathcal{C}$  un círculo (o una recta), con  $z_1, z_2, z_3$  puntos de  $\mathcal{C}$ . Para  $z \in \mathbb{C}$  definimos  $z^*$ , punto simétrico de  $z$  con respecto a  $\mathcal{C}$  como el único punto que satisface

$$(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}.$$

Veamos que si  $T$  es una transformación de Möbius que lleva  $\mathcal{C}$  a  $\text{Im } z = 0$  entonces  $Tz^* = \overline{Tz}$  es decir  $z^*$  está bien definido. Para esto utilizaremos el siguiente resultado que queda propuesto como ejercicio.

**Ejercicio 1.5.1.**

Sea  $\hat{T}$  una Transformación de Möbius tal que  $\hat{T}(\text{Im } z = 0) = (\text{Im } z = 0)$ , entonces  $\hat{T}$  se puede escribir con coeficientes reales, es decir:

$$\hat{T}(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Sea entonces  $M(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$  y  $T : \mathcal{C} \sim \text{Im } z = 0$  una transformación de Möbius con  $T(\mathcal{C}) = \text{Im } z$ , así utilizando el ejercicio  $T \circ M^{-1}$  se puede escribir con coeficientes reales y

$$\begin{aligned} Tz^* &= T \circ M^{-1}(Mz^*) \\ &= T \circ M^{-1}(\overline{Mz}) \\ &= \overline{T \circ M^{-1}(Mz)} \\ &= \overline{Tz}. \end{aligned}$$

■

**Proposición 1.5.1.**

Sea  $\mathcal{C}$  un círculo (o una recta), entonces  $z = z^*$  si y sólo si  $z \in \mathcal{C}$ .

**Demostración:**

Ejercicio.

**Proposición 1.5.2.**

Sean  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  círculos (o rectas) en  $\mathbb{C}$ , si  $T$  es una transformación de Möbius tal que  $T(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$ , entonces  $T$  transforma puntos simétricos con respecto a  $\mathcal{C}_1$  en puntos simétricos con respecto a  $\mathcal{C}_2$ .

**Demostración:**

Sean  $z_1, z_2, z_3$  puntos distintos en  $\mathcal{C}_1$  entonces tenemos que  $Tz_1, Tz_2, Tz_3 \in \mathcal{C}_2$ , así

$$(z, z_1, z_2, z_3) = (Tz, Tz_1, Tz_2, Tz_3),$$

luego

$$\begin{aligned} ((Tz)^*, Tz_1, Tz_2, Tz_3) &= \overline{(Tz, Tz_1, Tz_2, Tz_3)} \\ &= \overline{(z, z_1, z_2, z_3)} \\ &= (z^*, z_1, z_2, z_3) \\ &= (Tz^*, Tz_1, Tz_2, Tz_3). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(Tz)^* = Tz^*.$$

■

**Ejemplo 1.5.1.**

Sea  $\mathcal{C}$  un círculo de centro  $\alpha$  y radio  $R$ , encontrar el punto simétrico  $z^*$  con respecto a  $\mathcal{C}$  para cada  $z \in \mathbb{C}$ .

**Solución:**

Sean  $z_1, z_2, z_3$  puntos distintos en  $\mathcal{C}$ , entonces

$$\begin{aligned}
 (z^*, z_1, z_2, z_3) &= \overline{(z, z_1, z_2, z_3)} \\
 &= \overline{(z - \alpha, z_1 - \alpha, z_2 - \alpha, z_3 - \alpha)} \\
 &= \overline{(\bar{z} - \bar{\alpha}, \bar{z}_1 - \bar{\alpha}, \bar{z}_2 - \bar{\alpha}, \bar{z}_3 - \bar{\alpha})} \\
 &= \left(\bar{z} - \bar{\alpha}, \frac{R^2}{z_1 - \alpha}, \frac{R^2}{z_2 - \alpha}, \frac{R^2}{z_3 - \alpha}\right) \text{ pues } \overline{(z - \alpha)}(z - \alpha) = R^2 \text{ para todo } z \in \mathbb{C} \\
 &= \left(\frac{R^2}{\bar{z} - \bar{\alpha}}, z_1 - \alpha, z_2 - \alpha, z_3 - \alpha\right) \\
 &= \left(\frac{R^2}{\bar{z} - \bar{\alpha}} + \alpha, z_1, z_2, z_3\right).
 \end{aligned}$$

Luego

$$z^* = \frac{R^2}{z - \alpha} + \alpha.$$

Tenemos que

$$(z^* - \alpha)\overline{(z - \alpha)} = R^2$$

lo que equivale a que

$$|z^* - \alpha| = \frac{R^2}{|z - \alpha|} = \frac{R^2}{|z - \alpha|}.$$

Además

$$\arg(z^* - \alpha) + \arg(\overline{(z - \alpha)}) = 0 \pmod{2\pi},$$

lo que implica que

$$\arg(z^* - \alpha) = \arg(z - \alpha) \pmod{2\pi},$$

y por lo tanto  $z$  y  $z^*$  están en un mismo rayo que sale de  $\alpha$ .

Notemos que el punto simétrico de  $\alpha$  es  $\infty$ .

**Ejercicio 1.5.2.**

Encontrar una transformación de Möbius que lleve los círculos  $\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  y  $\mathcal{C}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1/4| = 1/4\}$  en círculos concéntricos.

# Capítulo 2

## Funciones Analíticas

### 2.1. Las condiciones de Cauchy-Riemann

#### Definición 2.1.1.

Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  una función, con  $U \subseteq \mathbb{C}$  un abierto y  $z \in U$ . Si el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}, \quad (2.1)$$

existe, entonces este límite se denota  $f'(z)$ . En este caso se dice que  $f$  es diferenciable en  $z$ . Si el límite existe para todo  $z$  perteneciente a  $U$ , diremos que  $f$  es diferenciable en  $U$ .

#### Proposición 2.1.1.

Si  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  es diferenciable en  $a \in U$  entonces  $f$  es continua en  $a$ .

#### Demostración:

Notemos que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow a} |f(z) - f(a)| &= \left[ \lim_{z \rightarrow a} \frac{|f(z) - f(a)|}{|z - a|} \right] \cdot \left[ \lim_{z \rightarrow a} |z - a| \right] \\ &= |f'(a)| \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

#### Proposición 2.1.2.

Si  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  es diferenciable en  $z$  y es de la forma  $f = u + iv$ , entonces  $\partial_x f$  y  $\partial_y f$  existen y satisfacen la ecuación de Cauchy-Riemann

$$\partial_y f = i \partial_x f,$$

es decir

$$\begin{aligned}\partial_x u &= \partial_y v \\ \partial_y u &= -\partial_x v.\end{aligned}$$

**Demostración:**

Primero supongamos que  $h \rightarrow 0$  es real, entonces

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \rightarrow \partial_x f.$$

Por otra parte supongamos que  $h = i\eta$  con  $\eta \in \mathbb{R}$  luego

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{f(x, y+\eta) - f(x, y)}{i\eta} \rightarrow \frac{\partial_y f}{i}.$$

Como  $f$  es diferenciable en  $z$  el límite tiene que ser el mismo sin importar el camino que se tome, y por lo tanto

$$\partial_y f = i\partial_x f.$$

Como  $f = u + iv$  y  $\partial_y f = i\partial_x f$ , entonces

$$\partial_y u + i\partial_y v = i(\partial_x u + i\partial_x v),$$

luego igualando las partes real e imaginaria

$$\begin{aligned}\partial_x u &= \partial_y v \\ \partial_y u &= -\partial_x v.\end{aligned}$$

■

**Observación 2.1.1.**

*La recíproca de la proposición anterior no es cierta. Existen funciones que no son diferenciables en un punto y que sin embargo las derivadas parciales existen y satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann.*

**Ejemplo 2.1.1.**

*Consideremos la función*

$$f(z) = f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x+iy)}{x^2+y^2} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

*$f = 0$  en ambos ejes así que  $\partial_x f = \partial_y f = 0$  en el origen, pero*

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

no existe, pues si tomamos el límite por la recta  $y = \alpha x$

$$\frac{f(z) - f(0)}{z} \equiv \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \text{ para } z \neq 0,$$

y por lo tanto el límite depende de  $\alpha$ .

**Proposición 2.1.3.**

Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  una función tal que  $\partial_x f$  y  $\partial_y f$  existen en una vecindad de  $z$ . Si  $\partial_x f$  y  $\partial_y f$  son continuas en  $z$  y  $\partial_y f = i\partial_x f$  entonces  $f$  es diferenciable en  $z$ .

**Demostración:**

Sean  $f = u + iv$ ,  $h = \xi + i\eta$ .

Probaremos que

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} \rightarrow \partial_x f(z) = \partial_x u(z) + i\partial_x v(z)$$

cuando  $h \rightarrow 0$ . Por el Teorema de valor medio

$$\begin{aligned} \frac{u(z+h) - u(z)}{h} &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x, y)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x+\xi, y)}{\xi + i\eta} + \frac{u(x+\xi, y) - u(x, y)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} \partial_y u(x+\xi, y+\theta_1\eta) + \frac{\xi}{\xi + i\eta} \partial_x u(x+\theta_2\xi, y), \end{aligned}$$

y análogamente tenemos que

$$\frac{v(z+h) - v(z)}{h} = \frac{\eta}{\xi + i\eta} \partial_y v(x+\xi, y+\theta_3\eta) + \frac{\xi}{\xi + i\eta} \partial_x v(x+\theta_4\xi, y),$$

para  $\theta_k \in (0, 1)$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ . Así obtenemos

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\eta}{\xi + i\eta} [\partial_y u(z_1) + i\partial_y v(z_2)] + \frac{\xi}{\xi + i\eta} [\partial_x u(z_3) + i\partial_x v(z_4)],$$

donde  $|z_k - z| \rightarrow 0$  cuando  $h \rightarrow 0$ , para  $k = 1, 2, 3, 4$ . Como  $\partial_y f = i\partial_x f$  en  $z$  podemos expresar  $\partial_x f(z)$  como

$$\frac{\eta}{\xi + i\eta} \partial_y f + \frac{\xi}{\xi + i\eta} \partial_x f$$

y

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \partial_x f(z) &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} [(\partial_y u(z_1) - \partial_y u(z)) + i(\partial_y v(z_2) - \partial_y v(z))] \\ &\quad + \frac{\xi}{\xi + i\eta} [(\partial_x u(z_3) - \partial_x u(z)) + i(\partial_x v(z_4) - \partial_x v(z))]. \end{aligned}$$

Finalmente, usando que

$$\left| \frac{\eta}{\xi + i\eta} \right|, \left| \frac{\xi}{\xi + i\eta} \right| \leq 1,$$

concluimos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \partial_x f(z).$$

■

### Ejercicio 2.1.1.

Sea  $f(z) = |z|^2$ , pruebe que  $f$  es diferenciable solamente en 0.

### Definición 2.1.2.

Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  con  $U \subseteq \mathbb{C}$  abierto. Diremos que  $f$  es analítica en  $z \in U$  si es diferenciable en una vecindad de  $z$ . Así mismo, si  $K \subset U$ , diremos que  $f$  es analítica en  $K$  si es diferenciable en un abierto que contiene a  $K$ .

### Ejemplo 2.1.2.

- (i) Pruebe que si  $f = u + iv$  es analítica en un abierto  $U$  y  $u$  es constante en  $U$ , entonces  $f$  es constante.
- (ii) Pruebe que si  $f = u + iv$  es analítica en un abierto  $U$  y  $|f|$  es constante en  $U$ , entonces  $f$  es constante.

### Solución:

- (i) Si  $f$  es analítica, entonces cumple las condiciones de Cauchy-Riemann, y tenemos que

$$\partial_x u = \partial_y u = 0 \implies \partial_x v = \partial_y v = 0$$

con lo que se concluye.

- (ii) Si  $|f| = 0$  el resultado es inmediato. Si no, tenemos que  $u^2 + v^2 \equiv c \neq 0$  y derivando con respecto a cada variable tenemos que

$$u\partial_x u + v\partial_x v \equiv 0 \text{ y } u\partial_y u + v\partial_y v \equiv 0.$$

Ocupando las ecuaciones de Cauchy-Riemann tenemos que

$$u\partial_x u - v\partial_y u \equiv 0 \text{ y } v\partial_x u - u\partial_y u \equiv 0,$$

de donde obtenemos

$$(u^2 + v^2)\partial_x u \equiv 0,$$

y así  $\partial_x u = \partial_y v \equiv 0$ . Análogamente  $\partial_y u = \partial_x v \equiv 0$ , y por lo tanto  $f$  es constante.

**Definición 2.1.3.**

Una función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  se dirá entera si es analítica en todo  $\mathbb{C}$ .

**Observación 2.1.2.**

Sea  $f$  una función analítica. Definamos  $g(z, \bar{z}) = f\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$ . Entonces  $g$  es independiente de  $\bar{z}$ .

**Demostración:**

En efecto,

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{1}{2} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{1}{2i},$$

y por Cauchy-Riemann tenemos que  $\frac{\partial f}{\partial x} = i \frac{\partial f}{\partial y}$ , por lo tanto

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0.$$

■

**Definición 2.1.4.**

Una función  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  se dirá armónica en  $U$  si satisface la ecuación  $\Delta u = 0$  en  $U$ , donde el operador  $\Delta$  está definido por

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

La siguiente proposición establece la relación entre funciones armónicas y funciones analíticas:

**Proposición 2.1.4.**

Sea  $f = u + iv : U \rightarrow \mathbb{C}$  analítica en  $U$ , con  $U$  abierto. Entonces,  $u, v$  son armónicas.

**Demostración:**

La demostración es una consecuencia directa de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. ■ La siguientes proposiciones establecen las reglas usuales de derivación.

**Proposición 2.1.5.**

Sean  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$  funciones diferenciables en  $z \in U$ , entonces:

- (i)  $f + g$  es diferenciable en  $z$  y  $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$ .
- (ii)  $fg$  es diferenciable en  $z$  y  $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + g'(z)f(z)$ .
- (iii) Si  $g(z) \neq 0$  entonces  $f/g$  es diferenciable en  $z$  y  $(f/g)'(z) = (f'(z)g(z) - g'(z)f(z))/g^2(z)$ .

**Proposición 2.1.6.**

Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g : V \rightarrow \mathbb{C}$  con  $f(U) \subset V$ . Suponga que  $f, g$  diferenciables en  $z$  y  $f(z)$  respectivamente, entonces  $(g \circ f)$  es diferenciable en  $z$  y  $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$ .

**Definición 2.1.5.**

Sean  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  y  $g : V \rightarrow \mathbb{C}$  con  $f$  inyectiva en  $U$  y  $U, V$  abiertos. Diremos que  $g$  es la inversa de  $f$  en  $U$  si  $f(U) = V$  y  $f(g(z)) = z$  en  $V$ . Diremos que  $g$  es la inversa de  $f$  en  $z_0 \in V$  si  $g$  es la inversa de  $f$  en una vecindad de  $z_0$ .

**Proposición 2.1.7.**

Suponga que  $g$  es la inversa de  $f$  en  $z_0$  y que  $g$  es continua en  $z_0$ . Si  $f$  es diferenciable en  $g(z_0)$  y  $f'(g(z_0)) \neq 0$  entonces  $g$  es diferenciable en  $z_0$  y

$$g'(z_0) = \frac{1}{f'(g(z_0))}.$$

Las demostraciones de estas proposiciones quedarán propuestas al lector.

## 2.2. Algunas funciones analíticas

En esta sección vamos a extender la función exponencial a una función de variable compleja. Queremos una función entera que satisfaga

(i)

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1)f(z_2)$$

(ii)

$$f(x) = e^x \text{ para todo real } x.$$

Para que cumpla (i) y (ii), debemos tener entonces

$$f(z) = f(x + iy) = f(x)f(iy) = e^x f(iy).$$

Definiendo  $f(iy) \equiv u(y) + iv(y)$ , obtenemos que

$$f(z) = e^x u(y) + ie^x v(y).$$

Para que  $f$  sea analítica necesitamos que se cumplan las condiciones de Cauchy-Riemann, y por lo tanto  $u(y) = v'(y)$  y  $u'(y) = -v(y)$ , con lo que tenemos que  $u'' = -u$ , entonces consideraremos

$$u(y) = \alpha \cos y + \beta \sin y$$

$$v(y) = -u'(y) = -\beta \cos y + \alpha \sin y.$$

Por la condición (ii) tenemos que  $u(0) = \alpha = 1$ , y  $v(0) = -\beta = 0$ , con lo que concluimos que

$$f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

Es fácil probar que  $f$  es entera ocupando las propiedades (i) y (ii), lo que queda propuesto al lector.

**Proposición 2.2.1.**

*Las siguientes propiedades se cumplen para la función  $f(z) = e^z$ :*

(i)  $|e^z| = e^x.$

(ii)  $e^z \neq 0.$

(iii)  $e^{iy} = \cos y + i \sin y.$

(iv)  $e^z = \alpha$  tiene infinitas soluciones para cualquier  $\alpha \neq 0.$

(v)  $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}.$

**Ejercicio 2.2.1.**

*Pruebe la proposición anterior.*

A partir de la función exponencial compleja se define al igual que en los reales la inversa de la exponencial.

**Definición 2.2.1.**

*Se define  $z = \log w$  como una solución de la ecuación  $e^z = w.$*

Debido a que la función exponencial es siempre distinta de cero entonces el logaritmo no está definido en cero. Si  $w \neq 0$  la ecuación  $e^z = w$ , con  $z = x + iy$ , es equivalente a

$$e^x = |w|, \quad e^{iy} = \frac{w}{|w|},$$

así  $x = \ln |w|$  y la segunda ecuación tiene una única solución en el intervalo  $(-\pi, \pi]$ , más aún cualquier otra solución difiere por un múltiplo entero de  $2\pi$ . La parte imaginaria de  $\log w$  es el argumento de  $w$ .

Así  $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  queda bien definida teniendo  $\log w = \ln |w| + i \arg w$ .

**Observación 2.2.1.**

*La función  $\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C}$  con  $\arg w \in (-\pi, \pi)$  se denomina la rama principal del logaritmo. Esta función es diferenciable en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  y por la Proposición 2.1.7 se cumple que  $\log'(z) = 1/z.$*

*En general, para  $\theta \in (-\pi, \pi)$  fijo, podemos definir  $\log : \mathbb{C} \setminus \{re^{i\theta}, r \geq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$  considerando  $\arg w \in (\theta - 2\pi, \theta).$*

Podemos definir la función  $z^b = \exp(b \log z)$  para  $z \neq 0$ . En general  $z^b$  tiene infinitos valores que difieren de factores  $e^{2\pi i b}$ . Hay un solo valor para esta expresión si  $b \in \mathbb{Z}$ , y en ese caso  $z^b$  es una potencia de  $z$  o  $1/z$ . Si  $b$  es racional  $b = \pm p/q$  con  $p, q$  primos relativos, entonces hay exactamente  $q$  valores para  $z^b$ .

**Observación 2.2.2.**

*El log satisface la siguiente propiedad módulo  $2\pi i$*

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2.$$

**Definición 2.2.2.**

*Se definen las funciones seno y coseno como*

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

**Teorema 2.2.1.**

*Las funciones seno y coseno complejas extienden a las correspondientes funciones reales. Además cumplen que:*

- (i)  $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ .
- (ii)  $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ .
- (iii)  $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ .
- (iv) Si  $k \in \mathbb{Z}$ , entonces  $\sin(z + 2k\pi) = \sin z$ ,  $\cos(z + 2k\pi) = \cos z$ .
- (v)  $\cos z = \cos(-z)$ ,  $\sin(-z) = -\sin z$ .

Sin embargo, no es cierto que  $|\sin z| \leq 1$ ,  $|\cos z| \leq 1$ . Por ejemplo, para todo número real  $x$  se cumple

$$\cos ix = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sin ix = i \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

que claramente no son acotadas.

**Ejercicio 2.2.2.**

*Demuestre la identidad  $\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ .*

Usando la definición de log podemos definir las funciones arc cos y arcsin. Para definir arc cos debemos resolver la ecuación  $\cos z = w$ , de donde resulta que

$$e^{iz} = w \pm \sqrt{w^2 - 1}, \text{ es decir } \arccos z = \pm i \log(w \pm \sqrt{w^2 - 1}),$$

donde hemos usado que  $w - \sqrt{w^2 - 1}$  y  $w + \sqrt{w^2 - 1}$  son inversos. La función arc cos tiene infinitas ramas debido a la periodicidad de  $\cos z$ . De manera análoga se define arcsin.

## 2.3. Transformaciones conformes

Sean  $z_1(t), z_2(t)$  con  $t \in I$  curvas suaves, es decir  $z'_j(t) \neq 0$  en  $I$  para  $j = 1, 2$ , contenidas en una región  $U \subset \mathbb{C}$  tal que para  $t_0 \in I$  se tiene  $z_1(t_0) = z_2(t_0) = z_0$ . Consideremos  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  analítica. Es fácil ver que para  $j = 1, 2$ , las curvas  $w_j(t) = f(z_j(t))$  satisfacen

$$w'_j(t) = f'(z_j(t))z'_j(t), \quad t \in I.$$

Claramente si en  $t_0$  se tiene que  $f'(z_0) \neq 0$  entonces  $w'_j(t_0) \neq 0$ , más aún se tiene que el

$$\arg w'_j(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z'_j(t_0).$$

Por lo que el ángulo entre las curvas  $z_1, z_2$  en  $z_0$  y el ángulo entre las curvas  $w_1, w_2$  en  $f(z_0)$  es el mismo, es decir, si  $f'(z_0) \neq 0$  la transformación  $f$  es conforme en  $z_0$ .

### Proposición 2.3.1.

Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  analítica en  $U$  con  $f'(z_0) \neq 0$ , entonces  $f$  es conforme en  $z_0$ .

La siguiente proposición establece que si  $f$  es una transformación conforme en  $\mathbb{R}^2$  entonces satisface las condiciones de Cauchy-Riemann.

### Proposición 2.3.2.

Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y$  son continuas, y  $f$  conforme en  $z_0 \in U$ . Entonces

$$\frac{\partial f(z_0)}{\partial x} = -i \frac{\partial f(z_0)}{\partial y}.$$

### Demostración:

Si  $z(t) = x(t) + iy(t)$  es una curva con  $z(t_0) = z_0$  entonces, usando regla de la cadena obtenemos que la curva  $w(t) = f(z(t))$  satisface

$$w'(t_0) = \frac{\partial f(z_0)}{\partial x} x'(t_0) + \frac{\partial f(z_0)}{\partial y} y'(t_0).$$

Escribiendo  $x(t) = (z(t) + \bar{z}(t))/2$ ,  $y(t) = (z(t) - \bar{z}(t))/2i$  obtenemos

$$w'(t_0) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f(z_0)}{\partial x} - i \frac{\partial f(z_0)}{\partial y} \right) z'(t_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f(z_0)}{\partial x} + i \frac{\partial f(z_0)}{\partial y} \right) \bar{z}'(t_0).$$

Es fácil probar que  $f$  es conforme si y sólo si,  $\arg(w'(t_0))/\arg(z'(t_0))$  es independiente de  $\arg(z'(t_0))$ , por lo tanto la expresión

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial f(z_0)}{\partial x} - i \frac{\partial f(z_0)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f(z_0)}{\partial x} + i \frac{\partial f(z_0)}{\partial y} \right) \frac{\bar{z}'(t_0)}{z'(t_0)},$$

debe tener argumento constante. Como  $\arg z'(t_0)$  es arbitrario, la expresión anterior describe un círculo con radio  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial f(z_0)}{\partial x} + i \frac{\partial f(z_0)}{\partial y} \right)$  y centro  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial f(z_0)}{\partial x} - i \frac{\partial f(z_0)}{\partial y} \right)$ . Así debemos tener que el radio de este círculo sea 0, es decir

$$\frac{\partial f(z_0)}{\partial x} = -i \frac{\partial f(z_0)}{\partial y}.$$

■

Para estudiar las propiedades geométricas de una transformación conforme, consideraremos como esta actúa sobre una familia de curvas.

Para empezar veremos una de las funciones más elementales,  $f(z) = z^2$  la cual es conforme excepto en  $z = 0$ . Consideramos la familia de curvas ortogonales en el plano  $Z$  dada por  $x = c_1$ ,  $y = c_1$  como se describe en la figura:

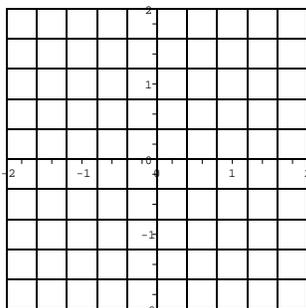


Figura 2.1: Familia de curvas I

La transformación  $w = z^2$  transforma estas curvas en la siguiente familia de parábolas ortogonales:

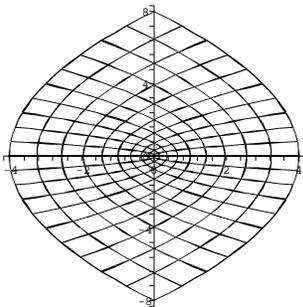


Figura 2.2: Transformación  $w = z^2$

En este caso las parábolas cuyos vértices están hacia la izquierda corresponden a la imagen de las rectas horizontales, y las otras a las verticales.

Otra transformación muy importante es  $w = e^z$ , para la cual es fácil ver cual es la imagen de la familia de curvas I. Para las rectas de la forma  $z = a + it$ , tenemos que  $e^z = e^a e^{it}$  donde la variable es  $t$ , por lo que tenemos que su imagen es una circunferencia de radio  $e^a$ . Para las rectas de la forma  $z = t + ib$ ,  $e^z = e^t e^{ib}$  con lo que tenemos una semirecta que sale del origen (cuando  $t \rightarrow -\infty$ ) y cuyo grado de inclinación es  $b$ .

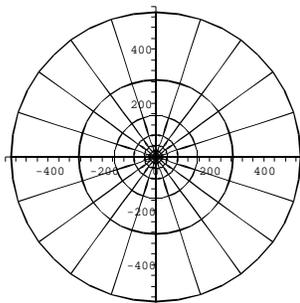


Figura 2.3: Transformación  $w = e^z$

Otra función muy interesante es  $w = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$  pero en este caso consideraremos como actúa sobre la siguiente familia de curvas ortogonales, compuesta de circunferencias concéntricas al origen y rectas que pasan por el origen:

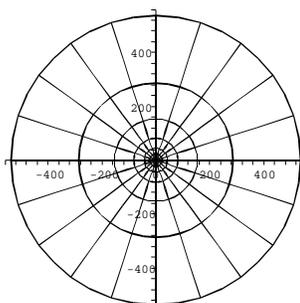


Figura 2.4: Familia de curvas II

Para estudiar la imagen de las circunferencias  $r = |z|$  con  $r < 1$  escribimos  $z = re^{it}$  con  $t \in [0, 2\pi]$ . Si denotamos  $w = u + iv$  la imagen, entonces

$$u + iv = \frac{1}{2}(re^{it} + \frac{1}{r}e^{-it}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + r\right) \cos t - i\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - r\right) \sin t,$$

por lo que  $u(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + r\right) \cos t$  y  $v(t) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - r\right) \sin t$ . Despejando  $\sin t$  y  $\cos t$  de las ecuaciones y sumando sus cuadrados se obtiene entonces que

$$\frac{u^2}{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + r\right)\right]^2} + \frac{v^2}{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - r\right)\right]^2} = 1,$$

lo que corresponde a la ecuación de una elipse.

Queda propuesto al lector ver que para la curva  $z(t) = te^{i\theta}$  con  $t \in [0, 1)$  tenemos que la imagen corresponde a una hipérbola, así tenemos entonces que la imagen de la función aplicada a la familia de curvas II es

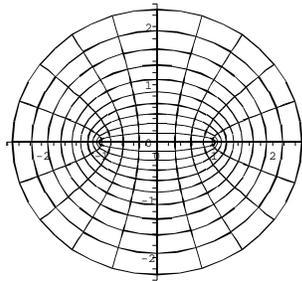


Figura 2.5: Transformación  $w = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$

Hay que notar que usando esta transformación podemos estudiar funciones trigonométricas. En particular, podemos deducir como actúa la función  $\cos z$  sobre una familia de curvas de tipo I.

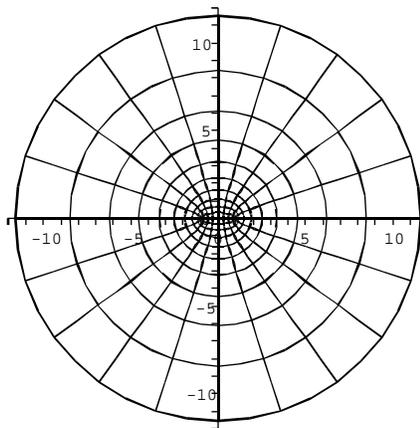
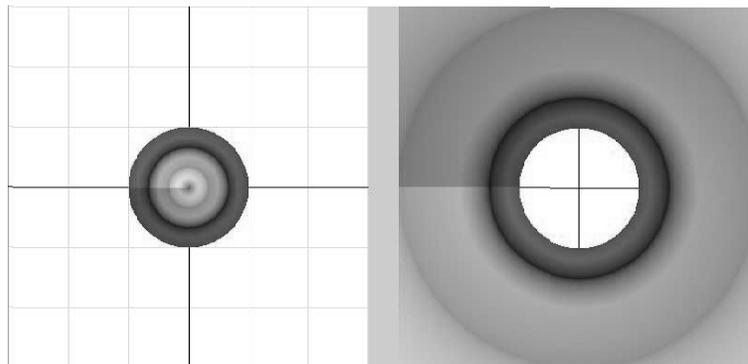
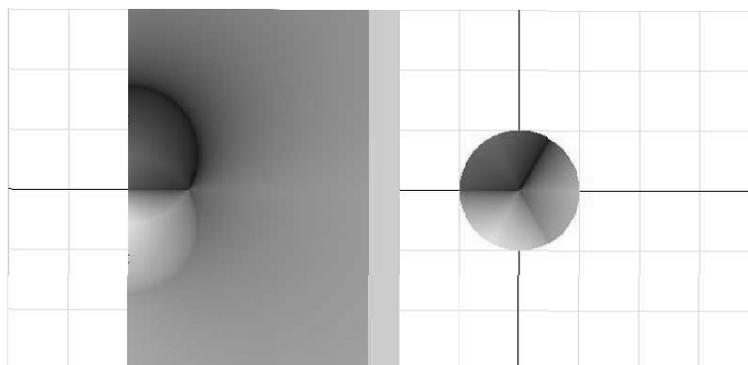
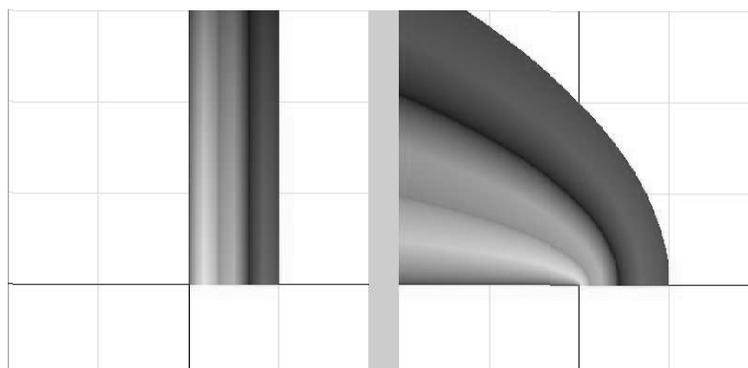


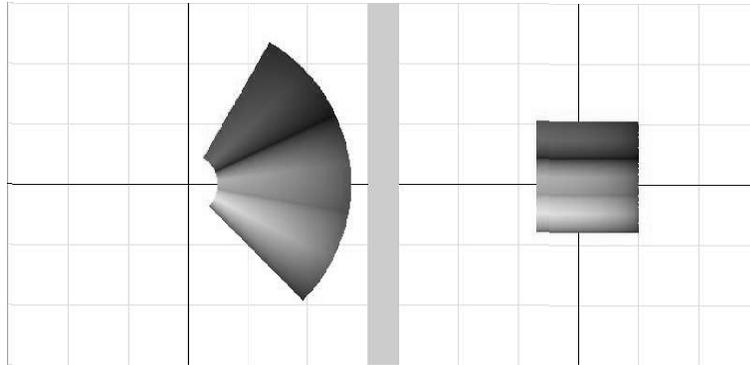
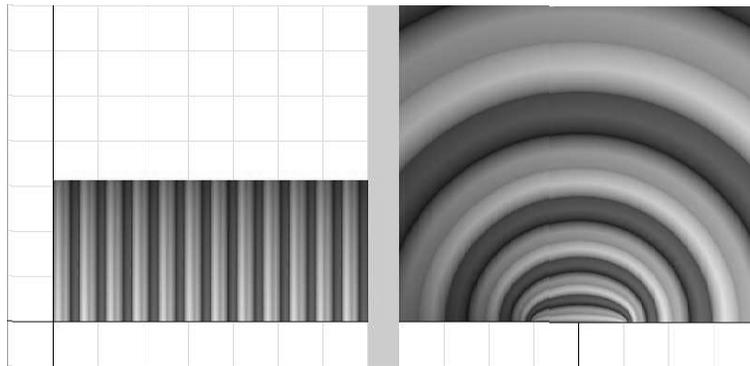
Figura 2.6: Transformación  $w = \cos z$

Las elipses corresponden a la imagen de las rectas horizontales y las hipérbolas a la de las verticales. A continuación se mostrará otras transformaciones conformes, pero ahora sobre regiones.

Las siguientes figuras muestran como algunas transformaciones conformes actúan sobre re-

giones. Las regiones de la izquierda corresponden a la variable  $z$  y las de la derecha a  $w = f(z)$ . Los tonos de gris indican la correspondencia.

Figura 2.7: Transformación  $1/z$ Figura 2.8: Transformación  $\frac{z-1}{z+1}$ Figura 2.9: Transformación  $z^2$

Figura 2.10: Transformación  $\log z$ Figura 2.11: Transformación  $\cosh z$ 

## 2.4. Series de potencias

### Definición 2.4.1.

Sea  $K \subseteq \mathbb{C}$  un conjunto y  $f_n : K \rightarrow \mathbb{C}$  una sucesión de funciones continuas. Diremos que  $f_n$  converge a  $f$  uniformemente en  $K$  si para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un número  $N \in \mathbb{N}$  tal que para cualquier natural  $n \geq N$

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \text{ para todo } z \text{ en } K.$$

### Proposición 2.4.1.

Si  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de funciones continuas que convergen uniformemente a  $f$  en el conjunto  $K$ , entonces  $f$  es también continua.

### Demostración:

Dado  $z_0$  en  $K$ , queremos demostrar que para cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe un número  $\delta > 0$  tal que

si  $|z - z_0| < \delta$  con  $z \in K$ , entonces  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ .

Como  $f_n$  converge uniformemente a  $f$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$|f_N(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall z \in K.$$

Puesto que  $f_N$  es continua, existe  $\delta > 0$  tal que si  $|z - z_0| < \delta$  entonces  $|f_N(z) - f_N(z_0)| < \varepsilon/3$ , luego

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= |f(z) - f_N(z) + f_N(z) - f_N(z_0) + f_N(z_0) - f(z_0)| \\ &\leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

■

### Proposición 2.4.2.

Sea  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones continuas en  $K$ , tal que  $|f_n| < M_n$  en  $K$ , con  $\sum_{n \in \mathbb{N}} M_n < \infty$ . Entonces la sucesión de funciones  $g_k$  definida por

$$g_k(z) = \sum_{n=0}^k f_n(z),$$

converge uniformemente a una función continua que denotaremos  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ .

### Demostración:

Demostremos que  $g_k$  es una sucesión de Cauchy,

$$\begin{aligned} |g_k(z) - g_l(z)| &= \left| \sum_{n=k}^l f_n(z) \right| \\ &\leq \sum_{n=k}^l |f_n(z)| \\ &\leq \sum_{n=k}^l M_n \longrightarrow 0, \text{ cuando } k, l \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Luego  $\{g_k(z)\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy independiente de  $z$ , con lo que tenemos que

$g_k(z) \rightarrow f(z)$ . Probemos ahora que  $g_k$  converge uniformemente.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) - \sum_{n=0}^k f_n(z) \right| &= \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(z) \right| \\ &\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |f_n(z)| \\ &\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} M_n \rightarrow 0, \text{ cuando } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

■

**Definición 2.4.2.**

Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números reales, definiremos el límite superior de la sucesión como

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k.$$

Notemos que la sucesión  $b_n = \sup_{k \geq n} a_k$  es decreciente, por lo que su límite está bien definido en  $(-\infty, \infty]$ .

**Observación 2.4.1.**

El  $\limsup a_n$  es el supremo de los puntos de acumulación de la sucesión. Es más, existe una subsucesión  $\{a_{n_k}\}$  que converge a  $\limsup a_n$ .

**Proposición 2.4.3.**

Sea  $L < \infty$  tal que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = L,$$

entonces:

(i) Para todo  $N$ , y para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $k > N$  tal que  $a_k \geq L - \varepsilon$ .

(ii) Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $N$  tal que  $a_k \leq L + \varepsilon$ , para cualquier  $k > N$ .

(iii) Si  $c \geq 0$ , entonces

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} ca_n = c \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

(iv) Si  $c_n \rightarrow c > 0$ , entonces

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} c_n a_n = c \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

**Definición 2.4.3.**

Sea  $\sum c_k z^k$  una serie de potencias, con  $c_k \in \mathbb{C}$ , se define el radio de convergencia  $R$  de la serie como

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} |c_k|^{1/k}} \in [0, \infty]. \quad (2.2)$$

**Ejercicio 2.4.1.**

Calcule el radio de convergencia de las siguientes series:

1.  $\sum z^{n!}$ .
2.  $\sum (n + 2^n) z^n$ .
3.  $\sum \frac{(-1)^n z^n}{n!}$ .
4.  $\sum \frac{n! z^n}{n^n}$ .

**Teorema 2.4.1.**

Sea  $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n}}$ , se tiene que

1. Si  $R = \infty$ , entonces  $\sum c_k z^k$  converge para todo  $z \in \mathbb{C}$ .
2. Si  $R = 0$ , entonces  $\sum c_k z^k$  converge solo para  $z = 0$ .
3. Si  $0 < R < \infty$ , entonces  $\sum c_k z^k$  converge en  $|z| < R$  y no converge en  $|z| > R$ .

**Demostración:**

1. Sea  $z \neq 0$ , como

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |c_k|^{1/k} = 0,$$

tomando  $\varepsilon = \frac{1}{2|z|}$ , por la Proposición 2.4.3(ii), existe un número  $N$  tal que  $|c_k|^{1/k} \leq \frac{1}{2|z|}$  para todo  $k > N$ , entonces

$$|c_k|^{1/k} |z| \leq \frac{1}{2},$$

y así

$$|c_k| |z|^k \leq \frac{1}{2^k},$$

lo que prueba el resultado.

2. Para una subsucesión  $c_{k_l}$ , tenemos que

$$|c_{k_l}|^{1/k_l} \geq \frac{1}{|z|},$$

entonces

$$|c_{k_l}|^{1/k_l} |z| \geq 1,$$

y así

$$|c_{k_l}| |z|^{k_l} \geq 1,$$

por lo tanto la serie no converge.

3. Si  $|z| < R(1 - 2\delta)$  para  $\delta > 0$ , entonces sabemos que existe un número  $N$  tal que para cualquier natural  $k > N$

$$|c_k|^{1/k} \leq \frac{1}{R}(1 + \delta),$$

luego

$$|c_k|^{1/k} |z| \leq (1 - 2\delta)(1 + \delta),$$

y por lo tanto

$$|c_k| |z|^k \leq \{(1 - 2\delta)(1 + \delta)\}^k,$$

con lo que la serie converge.

Si  $|z| > R$ , existe un número  $\delta > 0$  tal que  $|z| > R(1 + \delta)$ , entonces para todo natural  $N$  existe un número  $k$  tal que

$$|c_k|^{1/k} \geq \frac{1}{R}(1 - \frac{\delta}{2}),$$

por lo que

$$|c_k|^{1/k} |z| \geq (1 + \delta)(1 - \frac{\delta}{2}) > 1,$$

y la serie no converge. ■

**Nota.** Si el radio de convergencia  $R > 0$ , entonces  $\sum c_k z^k$  converge uniformemente en cualquier compacto  $K \subseteq D(0, R)$ . En particular

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

definida en  $D(0, R)$  es continua.

**Derivada de una serie de potencias**

Consideremos la serie de potencias

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

derivando formalmente, la derivada de  $f$  debiera estar dada por la serie

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1}.$$

La siguiente proposición probará este resultado.

**Proposición 2.4.4.**

Si el radio de convergencia de  $f$  es  $R > 0$ , entonces  $f'(z) = g(z)$  en  $D(0, R)$ , y el radio de convergencia de  $g$  es  $R$ .

**Demostración:**

Si

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |c_k|^{1/k} = \frac{1}{R} < \infty,$$

entonces es fácil ver que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |c_k|^{1/(k-1)} = \frac{1}{R},$$

y como  $k^{\frac{1}{k-1}} \rightarrow 1$ ,  $g$  y  $f$  tienen el mismo radio de convergencia. Vamos a demostrar que  $f'(z) = g(z)$  para todo  $|z| < R$ , es decir

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) \right| < \varepsilon.$$

Definiendo

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k,$$

y

$$R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k z^k,$$

tenemos que  $g(z) = f'_n(z) + S_n(z)$ , con  $S_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k k z^{k-1}$ . Vamos a probar que  $S_n(z) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Escribimos

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{f_n(z+h) - f_n(z)}{h} + \frac{R_n(z+h) - R_n(z)}{h},$$

con lo que

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) = \frac{f_n(z+h) - f_n(z)}{h} - f'_n(z) + \frac{R_n(z+h) - R_n(z)}{h} - S_n(z). \quad (2.3)$$

Veamos a qué corresponde el término  $\frac{R_n(z+h) - R_n(z)}{h}$ :

$$\frac{R_n(z+h) - R_n(z)}{h} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{c_k[(z+h)^k - z^k]}{h}.$$

Y cada término corresponde a

$$\frac{(z+h)^k - z^k}{h} = (z+h)^{k-1} + (z+h)^{k-2}z + \dots + (z+h)z^{k-2} + z^{k-1},$$

que son  $k$  términos. Si  $|z|, |z+h| < R(1-\eta)$ , entonces

$$\left| \frac{(z+h)^k - z^k}{h} \right| \leq kR^{k-1}(1-\eta)^{k-1},$$

con lo que tenemos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{c_k[(z+h)^k - z^k]}{h} \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k k R^{k-1} (1-\eta)^{k-1} \\ &\leq \varepsilon/3 \text{ para todo } n \geq N, \end{aligned}$$

pues el radio de convergencia de la serie  $\sum k c_k z^{k-1}$  es  $R$ . También tenemos que

$$\begin{aligned} |S_n| &\leq \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} k c_k z^{k-1} \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |k c_k| R^{k-1} (1-\eta)^{k-1} \\ &\leq \varepsilon/3 \text{ para todo } n \geq N. \end{aligned}$$

Fijemos  $n \geq N$ , como  $f_n$  es un polinomio, existe  $\delta > 0$ , tal que para todo  $|h| < \delta$

$$\left| \frac{f_n(z+h) - f_n(z)}{h} - f'_n(z) \right| < \varepsilon/3,$$

y por lo tanto usando (2.3) se concluye. ■

**Proposición 2.4.5.**

Si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

tiene radio de convergencia  $R > 0$ , entonces  $f$  es infinitas veces diferenciable en  $D(0, R)$ , y

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = a_k.$$

**Ejercicio 2.4.2.**

Desarrolle en serie de potencias la función  $f(z) = \frac{e^z}{1-2z+z^2}$  alrededor del cero y calcule su radio de convergencia.

**Teorema 2.4.2. Teorema de Unicidad**

Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ , una función con radio de convergencia  $R > 0$ , y  $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números distintos de cero, tal que  $z_k \rightarrow 0$ , y

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_k^n = 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{N},$$

entonces  $c_n = 0$  para todo  $n$ , y por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \equiv 0.$$

**Demostración:**

Sea

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n.$$

Como  $f(z_k) = 0$  para todo  $k$  y  $z_k \rightarrow 0$ , entonces por continuidad  $f(0) = c_0 = 0$ . Por lo tanto

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} c_n z^n.$$

Sea ahora

$$f_1(z) = \frac{f(z)}{z} = \sum_{n \geq 1} c_n z^{n-1},$$

continua en  $D(0, R)$ . Dado que  $f_1(z_k) = 0$ , obtenemos  $f_1(0) = c_1 = 0$ . Así sucesivamente tenemos que

$$f_l(z_k) = \sum_{n \geq l} c_n z_k^{n-l} = 0,$$

con ésto  $c_l = 0$ , para todo  $l$ . ■

**Corolario 2.4.1.**

Si  $\sum a_n z^n$ ,  $\sum b_n z^n$  convergen en  $D(0, R)$  y existe  $\{z_k\} \rightarrow 0$ ,  $z_k \neq 0$  tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_k^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z_k^n \text{ para todo } k,$$

entonces  $a_n = b_n$  para todo  $n$ .

**Ejemplo 2.4.1.**

Sea  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  una serie de potencias convergente en  $\mathbb{C}$  tal que  $f(\mathbb{R}) \subset (0, \infty)$  y  $f(2z) = (f(z))^2$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Demuestre que  $f(z) = e^{\lambda z}$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ . *Hint: Pruebe que para todo  $n \geq 0$  se tiene  $f(\frac{1}{2^n}) = e^{\frac{\lambda}{2^n}}$ , para algún  $\lambda \in \mathbb{R}$ .*

**Solución:**

Como  $f(\mathbb{R}) \subset (0, \infty)$ , entonces existe un  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $f(1) = e^\lambda$ . Ahora, usando inducción podemos probar que  $f(\frac{1}{2^n}) = e^{\frac{\lambda}{2^n}}$ , de hecho

$$\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = f(1) = e^\lambda,$$

entonces

$$f(1/2) = e^{\lambda/2}.$$

Si  $f(\frac{1}{2^n}) = e^{\lambda/2^n}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \left(f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)^2 &= f\left(\frac{2}{2^{n+1}}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{2^n}\right) \\ &= e^{\frac{\lambda}{2^n}}, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = e^{\frac{\lambda}{2^{n+1}}}.$$

Así  $z_k = \frac{1}{2^k} \rightarrow 0$ , satisface  $f(z_k) = e^{\lambda z_k}$  para todo  $k$ . Por el Teorema de Unicidad tenemos que

$$f(z) = e^{\lambda z}, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

**Ejemplo 2.4.2.**

Suponga que  $|c_n| \leq M e^{-nr}$ , con  $M, r$  constantes positivas. Demuestre que la función  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(nz)$  es analítica en  $\{| \operatorname{Im} z | < r\}$  y satisface  $f(z + 2\pi) = f(z)$  y  $f(-z) = -f(z)$ .

**Solución:**

La función  $f$  se puede escribir como

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left[ \frac{e^{inz} - e^{-inz}}{2i} \right].$$

Definamos  $f_1(z) = \sum c_n e^{inz}$  y  $f_2(z) = \sum c_n e^{-inz}$ , y veamos donde son analíticas.

Sea  $S(w) = \sum c_n w^n$ , por hipótesis  $\sqrt[n]{|c_n|} \leq e^{-r}$ , y por lo tanto el radio de convergencia de la serie  $S$  es  $R \geq \frac{1}{e^{-r}} = e^r$ .

Ahora si  $|\operatorname{Im} z| < r$ , entonces  $|e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im} z} < e^r$  y  $|e^{-iz}| = e^{\operatorname{Im} z} < e^r$ .

Por lo tanto  $S(e^{iz})$ ,  $S(e^{-iz})$  son analíticas si  $|\operatorname{Im} z| < r$ , y así  $f$  es analítica.

Claramente

$$f(-z) = -f(z) \text{ y}$$

$$\begin{aligned} f(z + 2\pi) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(nz + n2\pi) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(nz) \\ &= f(z). \end{aligned}$$

# Capítulo 3

## Integrales

### 3.1. Integral de línea

#### Definición 3.1.1.

Una función  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , se dice de variación acotada si existe una constante  $M > 0$  tal que para cualquier partición  $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$  de  $[a, b]$  se tiene

$$v(\gamma; P) = \sum_{k=1}^m |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \leq M.$$

La variación total de  $\gamma$ ,  $V(\gamma)$ , está definida por

$$V(\gamma) = \sup\{v(\gamma; P) : P \text{ es una partición de } [a, b]\}.$$

#### Definición 3.1.2.

Una función de la forma  $z(t) = x(t) + iy(t)$  con  $a \leq t \leq b$  se dice diferenciable por pedazos si existe una partición  $a < a_1 < a_2 < \dots < a_n < b$  tal que  $x, y$  son de clase  $C^\infty$  diferenciables en  $[a, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_n, b]$  y  $x, y$  son continuas en  $[a, b]$ . En este caso nos referiremos a la función como curva. Notar que el camino definido por la curva define siempre un conjunto compacto.

#### Proposición 3.1.1.

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  suave por pedazos, entonces  $\gamma$  es de variación acotada y

$$V(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

#### Demostración:

Asumiremos que  $\gamma$  es suave (el caso general se deduce fácilmente de éste).

Sea  $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$ , entonces de la definición 3.1.1,

$$\begin{aligned} v(\gamma; P) &= \sum_{k=1}^m |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \\ &= \sum_{k=1}^m \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)| dt \\ &= \int_a^b |\gamma'(t)| dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $V(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ , con lo que tenemos que  $\gamma$  es de variación acotada.

Como  $\gamma'$  es continua y estamos en un compacto, entonces  $\gamma'$  es uniformemente continua, así que dado cualquier  $\varepsilon > 0$ , tenemos un  $\delta_1 > 0$  tal que  $|s - t| < \delta_1$  implica que  $|\gamma'(s) - \gamma'(t)| < \varepsilon$ . Ahora tomaremos  $\delta_2 > 0$  tal que  $\|P\| := \max\{t_k - t_{k-1} : 1 \leq k \leq m\} < \delta_2$  entonces

$$\left| \int_a^b |\gamma'(t)| dt - \sum_{k=1}^m |\gamma'(\tau_k)|(t_k - t_{k-1}) \right| < \varepsilon,$$

donde  $\tau_k$  es cualquier número en  $[t_{k-1}, t_k]$ , y con esto

$$\begin{aligned} \int_a^b |\gamma'(t)| dt &\leq \varepsilon + \sum_{k=1}^m |\gamma'(\tau_k)|(t_k - t_{k-1}) \\ &= \varepsilon + \sum_{k=1}^m \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(\tau_k) dt \right| \\ &\leq \varepsilon + \sum_{k=1}^m \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} [\gamma'(\tau_k) - \gamma'(t)] dt \right| + \sum_{k=1}^m \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t) dt \right|. \end{aligned}$$

Si  $\|P\| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ , entonces  $|\gamma'(\tau_k) - \gamma'(t)| < \varepsilon$  para  $t \in [t_{k-1}, t_k]$  y

$$\begin{aligned} \int_a^b |\gamma'(t)| dt &\leq \varepsilon + \varepsilon(b - a) + \sum_{k=1}^m |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \\ &= \varepsilon[1 + (b - a)] + v(\gamma; P) \\ &\leq \varepsilon[1 + (b - a)] + V(\gamma). \end{aligned}$$

Tomando  $\varepsilon \searrow 0$ , se concluye que

$$V(\gamma) \geq \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

■

### Teorema 3.1.1.

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  de variación acotada, y suponga que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es una función continua. Entonces existe un número complejo  $I$  tal que para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que cuando  $P = \{t_0 < t_1 < \dots < t_m\}$  es una partición de  $[a, b]$  con  $\|P\| < \delta$ , entonces

$$\left| I - \sum_{k=1}^m f(\tau_k) [\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})] \right| < \varepsilon$$

para cualquier elección de puntos  $\tau_k$ ,  $t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k$ .

### Demostración:

Escojamos inductivamente números positivos tales que  $\delta_1 > \delta_2 > \dots$ , tales que si  $|s - t| < \delta_m$ , entonces  $|f(s) - f(t)| < 1/m$ .

Para cada  $m$  definamos  $\mathcal{P}_m =$  la clase de todas las particiones  $P$  de  $[a, b]$  con  $\|P\| < \delta_m$ ; así  $\mathcal{P}_1 \supset \mathcal{P}_2 \supset \dots$ . Finalmente definimos  $F_m$  como la adherencia del conjunto:

$$\left\{ \sum_{k=1}^n f(\tau_k) [\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})] : P \in \mathcal{P}_m, \text{ y } t_{k-1} < \tau_k < t_k \right\},$$

de donde se sigue que  $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ , y  $\text{diam} F_m \leq \frac{2}{m} V(\gamma)$ . Con ésto por el Teorema de Cantor existe un único complejo  $I$  tal que  $I \in F_m$  para todo  $m \geq 1$ . Con ésto se concluye la demostración, pues tomando  $\varepsilon > 0$ ,  $m > \frac{2}{\varepsilon} V(\gamma)$  y  $\delta = \delta_m$ , entonces  $F_m \subset B(I, \varepsilon)$ . ■

Este número  $I$  es denominado como *la Integral de Riemann-Stieljes de  $f$  con respecto a  $\gamma$  sobre  $[a, b]$*  y se denota por:

$$I = \int_a^b f d\gamma = \int_a^b f(t) d\gamma(t).$$

### Proposición 3.1.2.

Sean  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , de variación acotada, y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua. Si  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ , entonces

$$\int_a^b f d\gamma = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f d\gamma.$$

**Teorema 3.1.2.**

Si  $\gamma$  es suave por pedazos y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es una función continua, entonces

$$\int_a^b f d\gamma = \int_a^b f(t)\gamma'(t)dt.$$

**Demostración:**

Consideraremos el caso en que  $\gamma$  es suave, y nos preocuparemos de la parte real de la función, por analogía se puede probar para la parte imaginaria. Por lo tanto consideremos el caso en que  $\gamma([a, b]) \subseteq \mathbb{R}$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ , y escojamos  $\delta > 0$  tal que si  $\|P\| < \delta$ , entonces

$$\left| \int_a^b f d\gamma - \sum_{k=1}^n f(\tau_k)[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})] \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (3.1)$$

y

$$\left| \int_a^b f(t)\gamma'(t)dt - \sum_{k=1}^n f(\tau_k)\gamma'(\tau_k)(t_k - t_{k-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (3.2)$$

para cualquier  $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ .

Aplicando el Teorema del valor medio obtenemos que existe una secuencia de números  $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$  con  $\gamma'(\tau_k) = [\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})](t_k - t_{k-1})^{-1}$ , y así

$$\sum_{k=1}^n f(\tau_k)[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})] = \sum_{k=1}^n f(\tau_k)\gamma'(\tau_k)(t_k - t_{k-1}).$$

Combinando (3.1) y (3.2) se concluye que

$$\left| \int_a^b f d\gamma - \int_a^b f(t)\gamma'(t)dt \right| < \varepsilon.$$

■

**Definición 3.1.3.**

Diremos que  $\gamma$  es una curva rectificable si  $\gamma$  es de variación acotada. Si además la curva  $\gamma(t)$  cumple que  $\gamma'(t) = x'(t) + y'(t) \neq 0$  excepto tal vez en un número finito de puntos, diremos que la curva es suave.

**Definición 3.1.4.**

Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es una curva rectificable y  $f$  es una función continua sobre la curva  $\gamma$ , entonces la (integral de línea) de  $f$  sobre  $\gamma$  está definida por

$$\int_a^b f(\gamma(t))d\gamma(t).$$

Esta integral de línea también se denota por  $\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz$ .

**Teorema 3.1.3.**

Sean  $A$  un conjunto abierto en  $\mathbb{C}$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$  un camino rectificable, y  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua, entonces para todo  $\varepsilon > 0$  existe un camino poligonal  $\Gamma$  en  $A$  tal que  $\Gamma(a) = \gamma(a)$ ,  $\Gamma(b) = \gamma(b)$ , y  $\left| \int_\gamma f - \int_\Gamma f \right| < \varepsilon$ .

**Demostración:**

Esta demostración la vamos a dividir en dos casos.

*Caso I:*

Supongamos que  $A$  es un disco abierto. Como  $\gamma([a, b])$  es un compacto, se tiene que  $d = \text{dist}(\gamma([a, b]), \delta A) > 0$ . Se sigue que si  $A = D(c, r)$  entonces  $\gamma([a, b]) \subseteq D(c, \rho)$ , donde  $\rho = r - \frac{1}{2}d$ , y  $f$  va a ser entonces uniformemente continua en  $D(c, \rho) \subseteq A$ . Así sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $f$  es uniformemente continua en  $A$ . Tomemos  $\delta > 0$  tal que  $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$  cuando  $|z - w| < \delta$ . Escogamos una partición de  $[a, b]$ ,  $\{t_0 < t_1 < \dots < t_n\}$ , tal que

$$|\gamma(s) - \gamma(t)| < \frac{\delta}{2}, \quad (3.3)$$

si  $t_{k-1} \leq s, t \leq t_k$ , y tal que para  $t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k$  tengamos que

$$\left| \int_\gamma f - \sum_{k=1}^n f(\gamma(\tau_k))[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})] \right| < \varepsilon. \quad (3.4)$$

Definamos  $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  como

$$\Gamma(t) = \frac{1}{t_k - t_{k-1}} [(t_k - t)\gamma(t_{k-1}) + (t - t_{k-1})\gamma(t_k)], \text{ si } t_{k-1} \leq t \leq t_k.$$

Con lo que  $\Gamma$  es un camino poligonal en  $A$ . De (3.3)

$$|\Gamma(t) - \gamma(\tau_k)| < \delta, \text{ para } t_{k-1} \leq t \leq t_k. \quad (3.5)$$

Como

$$\int_{\Gamma} f = \int_a^b f(\Gamma(t))\Gamma'(t)dt,$$

se sigue que

$$\int_{\Gamma} f = \sum_{k=1}^n \frac{\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\Gamma(t))dt,$$

y por (3.4)

$$\left| \int_{\gamma} f - \int_{\Gamma} f \right| \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|(t_k - t_{k-1})^{-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f(\Gamma(t)) - f(\gamma(\tau_k))|dt$$

Aplicando la desigualdad (3.5) se concluye que

$$\left| \int_{\Gamma} f - \int_{\gamma} f \right| \leq \varepsilon(1 + V(\gamma)).$$

*Caso II:*

Este caso queda propuesto al lector siguiendo una demostración análoga al *Caso I*. ■

**Observación 3.1.1.**

Debido al Teorema (3.1.3) los caminos de integración  $\gamma$  serán parametrizados por curvas suaves por pedazos.

**Definición 3.1.5.**

Las curvas

$\mathcal{C}_1: z(t)$  con  $a \leq t \leq b$ ;  $\mathcal{C}_2: w(t)$  con  $c \leq t \leq d$ , se dirán equivalentes  $\mathcal{C}_1 \simeq \mathcal{C}_2$  si existe una función

$$\lambda: [a, b] \longrightarrow [c, d] \text{ de clase } \mathcal{C}^1, \text{ } 1 a 1,$$

tal que:

(i)  $\lambda(a) = c; \lambda(b) = d$

(ii)  $\lambda'(t) > 0 \forall t$

(iii)  $z(t) = w(\lambda(t))$

**Definición 3.1.6.**

Sea  $\mathcal{C}$  una curva parametrizada por  $z(t)$ ,  $t \in [a, b]$ . Definimos  $-\mathcal{C}$  la curva parametrizada por  $w(t) = z(a + b - t)$ ,  $t \in [a, b]$

**Ejercicio 3.1.1.**

1. Demuestre que la relación  $\simeq$  es de equivalencia.
2. Si  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  son curvas equivalentes, y sea  $f$  es una función continua en  $\mathcal{C}_1$ , entonces

$$\int_{\mathcal{C}_1} f(z)dz = \int_{\mathcal{C}_2} f(z)dz$$

3. Demuestre que

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = - \int_{-\mathcal{C}} f(z)dz$$

**Ejemplo 3.1.1.**

Sea la función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(z) = \frac{1}{z}$ , sea la curva parametrizada por  $\mathcal{C} : \xi(t) = R \cos(t) + iR \sin(t); t \in [0, 2\pi]$ , demostrar que

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2\pi i.$$

**Solución:**

Por definición:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(\xi(t))\xi'(t)dt.$$

Veamos a que corresponde cada termino:

$$\xi(t) = R \cos(t) + iR \sin(t) \implies \xi'(t) = -R \sin(t) + iR \cos(t) \equiv i\xi(t),$$

$$f(\xi(t)) = \frac{1}{R \cos(t) + iR \sin(t)}.$$

Entonces

$$f(\xi(t))\xi'(t) = \frac{1}{R \cos(t) + iR \sin(t)} i(R \cos(t) + iR \sin(t)) \equiv i.$$

Por lo tanto

$$\int_0^{2\pi} f(\xi(t))\xi'(t)dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i$$

■

**Definición 3.1.7.**

Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , se dirá que  $\alpha \ll \beta$  si  $|\alpha| \leq |\beta|$

**Lema 3.1.1.**

Sea  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua, entonces

$$\int_a^b G(t)dt \ll \int_a^b |G(t)|dt$$

**Demostración:**

$$\int_a^b G(t)dt = Re^{i\theta}, \quad R \geq 0$$

Entonces

$$\int_a^b e^{-i\theta} G(t)dt = R,$$

así

$$R = \int_a^b e^{-i\theta} G(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re} [e^{i\theta} G(t)] dt$$

pero

$$\operatorname{Re} [e^{-i\theta} G(t)] \leq |e^{-i\theta} G(t)| = |G(t)|,$$

y por lo tanto

$$\left| \int_a^b G(t)dt \right| \leq \int_a^b |G(t)|dt.$$

■

**Proposición 3.1.3.**

Sea  $\mathcal{C}$  una curva suave parametrizada por  $\xi(t)$   $t \in [a, b]$  de largo  $L$ , i.e.

$$L = \int_a^b |\xi'(t)|dt$$

Sea  $f$  una función continua en  $\mathcal{C}$ , y  $M > 0$  tal que  $f(z) \ll M$  para todo  $z \in \mathcal{C}$  (i.e.  $|f(z)| < M$ ), entonces

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz \ll ML$$

**Demostración:**

Por el lema anterior

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{C}} f(z)dz \right| &= \left| \int_a^b f(\xi(t))\xi'(t)dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(\xi(t))||\xi'(t)|dt, \end{aligned}$$

y como  $|f(z)| \leq M$  en  $\mathcal{C}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{C}} f(z) dz \right| &\leq M \int_a^b |\xi'(t)| dt \\ &= ML. \end{aligned}$$

■

**Proposición 3.1.4.**

Sea  $\mathcal{C}$  una curva, y  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones continuas en  $\mathcal{C}$ , tal que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en  $\mathcal{C}$ . Entonces:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}} f_n(z) dz.$$

**Demostración:**

Si  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  son todas continuas en  $\mathcal{C}$  y convergen uniformemente a  $f$  en  $\mathcal{C}$  entonces  $f$  es continua en  $\mathcal{C}$ . Además por el Lema (3.1.1)

$$\left| \int_{\mathcal{C}} (f_n - f)(z) dz \right| \leq \int_{\mathcal{C}} |f_n(z) - f(z)| |dz|,$$

por lo que para  $\varepsilon > 0$  existe  $N > 0$  tal que

$$\left| \int_{\mathcal{C}} (f_n - f)(z) dz \right| \leq \varepsilon \cdot L \quad \forall n \geq N,$$

lo que prueba el resultado. ■

**Proposición 3.1.5.**

Sea  $\mathcal{C}$  una curva parametrizada por  $\xi(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , y  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua,  $\mathcal{U}$  abierto tal que  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}$ . Supongamos que existe una función analítica  $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f(z) = F'(z)$ . Entonces

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = F(\xi(b)) - F(\xi(a)).$$

**Demostración:**

Tenemos que

$$\frac{d}{dt}(F(\xi(t))) = F'(\xi(t))\xi'(t),$$

por lo que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} f(z) dz &= \int_a^b F'(\xi(t))\xi'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}(F(\xi(t))) dt \\ &= F(\xi(b)) - F(\xi(a)). \end{aligned}$$

■

## 3.2. Fórmula integral de Cauchy

### 3.2.1. Teorema del rectángulo

#### Definición 3.2.1.

Sea  $\mathcal{C}$  una curva parametrizada por  $\xi(t)$   $t \in [a, b]$ , diremos que  $\mathcal{C}$  es cerrada si  $\xi(a) = \xi(b)$ . Más aún diremos que la curva  $\mathcal{C}$  es cerrada simple si  $\xi(t_1) = \xi(t_2)$ ,  $t_1 < t_2 \implies t_1 = a \wedge t_2 = b$ .

#### Teorema 3.2.1. (Teorema del Rectángulo)

Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tales que  $a < b$ ,  $c < d$  y  $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{C}$  el rectángulo definido por:

$$\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Re} z \leq b, c \leq \operatorname{Im} z \leq d\}.$$

Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica, con  $\Omega$  un abierto que contiene a  $\mathcal{R}$ . Entonces

$$\int_{\partial\mathcal{R}} f(z)dz = 0,$$

con  $\partial\mathcal{R}$  la frontera de  $\mathcal{R}$  orientada en sentido antihorario.

Antes de proceder a la demostración del teorema probaremos el siguiente lema.

#### Lema 3.2.1.

Sea  $f$  una función lineal, i.e.  $f$  es de la forma  $f(z) = az + b$  con  $a$  y  $b$  constantes pertenecientes a  $\mathbb{C}$ , entonces

$$\int_{\partial\mathcal{R}} f(z)dz = 0.$$

#### Demostración:

Considerando  $F(z) = a\frac{z^2}{2} + bz$  se tiene que  $\int_{\partial\mathcal{R}} f(z)dz = F(\xi(b)) - F(\xi(a)) = 0$ .  $\square$

#### Demostración del Teorema del Rectángulo:

Sea  $I = \int_{\partial\mathcal{R}} f(z)dz$ , y supongamos que  $|I| > 0$ . Sean  $l_1, l_2$  las dimensiones del rectángulo, i.e.  $l_1 = b - a$ ,  $l_2 = d - c$ , procederemos por contradicción. Definimos  $\mathcal{R}_1^1, \mathcal{R}_2^1, \mathcal{R}_3^1, \mathcal{R}_4^1 \subseteq \mathbb{C}$  cuatro rectángulos, con frontera orientada en sentido antihorario, congruentes de interior disjunto 2 a 2 de dimensión  $\frac{l_1}{2} \times \frac{l_2}{2}$ , tales que  $\bigcup_{i=1}^4 \mathcal{R}_i^1 = \mathcal{R}$ . Entonces

$$\int_{\partial\mathcal{R}} f(z)dz = \sum_{i=1}^4 \int_{\partial\mathcal{R}_i^1} f(z)dz$$

Dado que  $|I| > 0$  existe  $i$  tal que

$$\left| \int_{\partial\mathcal{R}_i^1} f(z)dz \right| \geq \frac{|I|}{4}.$$

Este rectángulo se denominará  $\mathcal{R}^1$ . Sean ahora los rectángulos  $\mathcal{R}_1^2, \mathcal{R}_2^2, \mathcal{R}_3^2, \mathcal{R}_4^2 \subseteq \mathbb{C}$  de dimensiones  $\frac{l_1}{2^2} \times \frac{l_2}{2^2}$  con  $\bigcup_{i=1}^4 \mathcal{R}_i^2 = \mathcal{R}^1$ . Entonces existe  $i$  tal que

$$\left| \int_{\partial \mathcal{R}_i^2} f(z) dz \right| \geq \frac{|I|}{4^2}.$$

Denominaremos ahora a este rectángulo  $\mathcal{R}^2$ . Procediendo de manera recursiva obtenemos una secuencia de rectángulos  $\mathcal{R}^n$  cuyas dimensiones son  $\frac{l_1}{2^n} \times \frac{l_2}{2^n}$  con la propiedad

$$\left| \int_{\partial \mathcal{R}^n} f(z) dz \right| \geq \frac{|I|}{4^n}.$$

Por lo tanto tenemos una secuencia de conjuntos cerrados decreciente no vacíos que cumplen  $\text{diam}(\mathcal{R}^n) \rightarrow 0$ . Por el Teorema de cerrados encajonados de Cantor, se tiene que existe un único  $z_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $z_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}^n$ .

Por otra parte en  $\mathcal{R}^n$  podemos expandir  $f$   
 $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon_z(z - z_0)$ , con  $|\varepsilon_z(z - z_0)| \leq \varepsilon|z - z_0|$  para  $n \geq N$ .

Así

$$\int_{\partial \mathcal{R}^n} f(z) dz = \int_{\partial \mathcal{R}^n} f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon_z(z - z_0) dz = \int_{\partial \mathcal{R}^n} \varepsilon_z(z - z_0) dz,$$

y usando que  $|z - z_0| \leq \frac{1}{2^n} \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial \mathcal{R}^n} f(z) dz \right| &\leq \frac{l_1 + l_2}{2^{n-1}} \frac{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}{2^n} \cdot \varepsilon \\ &= \frac{2\varepsilon(l_1 + l_2)\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}{4^n}. \end{aligned}$$

Como  $\varepsilon$  es arbitrario obtenemos una contradicción. ■

### Proposición 3.2.1.

Sea  $f : \text{int}(\mathcal{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica, con  $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ . Entonces existe  $F : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{C}$  analítica tal que  $F' = f$ .

### Observación 3.2.1.

En realidad la hipótesis que  $f$  sea analítica es más potente que lo necesario, solamente necesitamos que  $f$  sea continua y que  $\int_{\tilde{\mathcal{R}}} f dz = 0$  para todo  $\tilde{\mathcal{R}} \subset \mathcal{R}$  rectángulo.

**Demostración:**

Sin pérdida de generalidad supongamos que  $0 \in \text{int}(\mathcal{R})$ . Consideremos la curva  $\Gamma_z$

$$\Gamma_z : \begin{cases} 2\lambda \text{Re}z & \text{si } \lambda \in [0, 1/2] \\ \text{Re}z + (2\lambda - 1)\text{Im}z & \text{si } \lambda \in [1/2, 1] \end{cases}$$

con el punto  $z \in \text{int}(\mathcal{R})$ . Definamos ahora

$$F(z) = \int_0^z f(\omega) d\omega \equiv \int_{\Gamma_z} f(\omega) d\omega.$$

Probaremos que  $F'(z) = f(z)$  es decir:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \rightarrow 0.$$

Desarrollando

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z, z+\text{Re}h]} f(\omega) d\omega + \int_{[z+\text{Re}h, z+h]} f(\omega) d\omega,$$

entonces

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_{[z, z+\text{Re}h]} f(\omega) - f(z) d\omega + \frac{1}{h} \int_{[z+\text{Re}h, z+h]} f(\omega) - f(\omega) d\omega.$$

Ahora sea  $h$  tal que si  $|\omega - z| < |h|$ , entonces  $|f(z) - f(\omega)| < \varepsilon$  lo cual muestra:

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \varepsilon \cdot \frac{|\text{Re}h|}{|h|} + i\varepsilon \cdot \frac{|\text{Im}h|}{|h|} \leq \varepsilon$$

■

**Nota.** Los resultados vistos no solo sirven para rectángulos, también se pueden extender a dominios como discos.

**Teorema 3.2.2.**

Sea  $f$  una función analítica en  $\mathbb{C}$  y  $\mathcal{C}$  una curva cerrada (o un rectángulo), entonces:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0.$$

**Demostración:**

Sea  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  analítica tal que  $F' = f$ , la cual existe por la proposición anterior. Por la Proposición 3.1.5 tenemos que

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}} F'(z) dz = 0.$$

■

### 3.2.2. Fórmula integral de Cauchy

Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica con  $\Omega$  un abierto que contiene al rectángulo  $\mathcal{R}$ . Sea  $a \in \Omega$  y  $\Gamma = \partial\mathcal{R}$ . Definamos  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  de la siguiente forma:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & \text{si } z \neq a, \\ f'(a) & \text{si } z = a, \end{cases}$$

la cual es claramente continua.

**Proposición 3.2.2.**

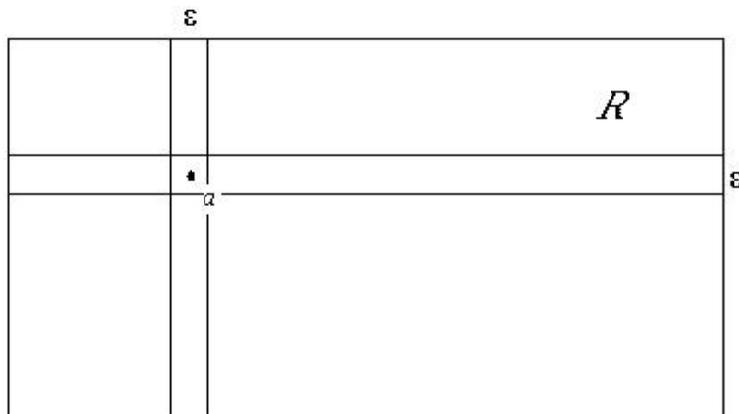
$$\int_{\Gamma} g(z)dz = 0$$

**Demostración:**

Distinguiremos tres casos.

Si  $a \notin \mathcal{R}$  concluimos usando el Teorema (3.2.1).

Si  $a \in \text{int}\mathcal{R}$ , entonces dividimos  $\mathcal{R}$  como en la figura y usando el Teorema (3.2.1) y la continuidad de  $g$  concluimos el resultado.



El caso  $a \in \delta\mathcal{R}$  es similar. ■

**Teorema 3.2.3.** (Fórmula integral de Cauchy)

Sea  $f$  una función analítica en  $D(z_0, R)$  y  $0 < r < R$ , entonces para  $|a| < r$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-a} dz,$$

con  $\mathcal{C} = re^{i\theta}$ ,  $0 < \theta < 2\pi$ .

**Demostración:**

Como  $a \notin \mathcal{C}$ , por la Proposición 3.2.2

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz = 0$$

es decir

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a) \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-a} dz = 2\pi i f(a).$$
■

**Ejemplo 3.2.1.**

Resolver las siguientes integrales utilizando la fórmula integral de Cauchy:

1.

$$\int_{|z|=1} \sqrt{9-z^2} dz$$

2.

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2+2z} dz$$

3.

$$\oint_{|z|=3} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz$$

**Solución:**

1. Notemos que  $f(z) = z\sqrt{9-z^2}$  es analítica en  $D(0, 3)$ , y aplicando la fórmula integral de Cauchy obtenemos que

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z-0} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i (0 \cdot \sqrt{9-0^2}) = 0,$$

por lo tanto

$$\int_{|z|=1} \sqrt{9-z^2} dz = 0.$$

2. La función  $f(z) = \frac{1}{z+2}$  la cual es analítica en  $D(0, 2)$  y entonces

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z-0} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \frac{1}{0+2} = \pi i.$$

Así

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 2z} dz = \pi i.$$

3. Primero veamos como podemos escribir ésto de una manera apropiada

$$\frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} = \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-2)} - \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)},$$

entonces si  $f(z) = \sin \pi z^2 + \cos \pi z^2$ , ocupando la fórmula integral de Cauchy, tenemos

$$\oint_{|z|=3} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz = 2\pi i (f(2) - f(1)) = 2\pi i (1 - (-1)) = 4\pi i.$$

Analizaremos en más detalle la Fórmula integral de Cauchy

**Teorema 3.2.4.** (Desarrollo en serie de potencias)

Si  $f$  es una función analítica en el disco  $D(z_0, R)$ , entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

con  $c_n \in \mathbb{C}$ , para todo  $z$  en  $D(z_0, R)$ .

**Demostración:**

Veamos el caso en que  $z_0 = 0$ ,

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z(1-\frac{a}{z})}, \text{ y tenemos } \left| \frac{a}{z} \right| < 1$$

entonces

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n$$

como la serie converge uniformemente en  $\mathcal{C}$  podemos intercambiar la integral con la serie, luego

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

los coeficientes  $\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$  no dependen de  $a$ , con  $a \in D(0, r)$ , y con  $0 < r < R$ , pero sí podrían depender de  $R$ , veamos que ésto no es así

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n, \quad \forall a \in D(0, r)$$

y sabemos que  $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ , y por lo tanto no depende de  $R$ . ■

**Corolario 3.2.1.**

Sea  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  analítica en  $\mathcal{U}$ , entonces

1.  $f$  es  $C^\infty$  en  $\mathcal{U}$ .
2. Si  $f$  es analítica en  $\mathbb{C}$ , entonces el radio de convergencia de  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$  es  $\infty$ .

**Observación 3.2.2.**

Supongamos que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es una función analítica, con  $\Omega$  un abierto. Sea ahora  $z_0 \in \Omega$ ,  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $D(z_0, r) \subset \Omega$ , sea  $a \in D(z_0, r)$ , y sea  $\mathcal{C}_r(z_0) = z_0 + re^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - a} dz$$

realizando el mismo procedimiento anterior

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (a - z_0)^n, \quad \text{con} \quad \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

y el radio de convergencia de la serie es  $\geq \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$ .

**Proposición 3.2.3.** (Expansión de Taylor)

Sea  $f$  una función analítica en  $n$  dominio  $\Omega$ , y  $a \in \Omega$ , entonces se puede escribir

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)(z - a)^{n-1}}{(n-1)!} + (z - a)^n f_n(z),$$

con  $f_n$  analítica en  $\Omega$ ; y si  $f$  es analítica en  $\overline{D(a, r)}$ , entonces para todo  $z \in D(a, r)$

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta D(a, r)} \frac{f(w)}{(w - a)^n (w - z)} dw,$$

y

$$|f_n(z)| \leq \frac{\max_{\delta D(a, r)} |f(w)|}{r^{n-1}(r - |z - a|)}.$$

**Demostración:**

Debido a el Corolario (3.2.1)  $f_n$  es analítica, y por lo tanto

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta D(a,r)} \frac{f_n(w)}{w-z} dw,$$

además

$$f(w) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (w-a)^k + (w-a)^n f_n(w),$$

por lo que

$$\frac{f(w)}{(w-z)(w-a)^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \frac{(w-a)^{k-n}}{(w-z)} + \frac{f_n(w)}{w-z},$$

integrando

$$\int_{\delta D(a,r)} \frac{f(w)}{(w-z)(w-a)^n} dw = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\delta D(a,r)} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \frac{(w-a)^{k-n}}{(w-z)} dw + \int_{\delta D(a,r)} \frac{f_n(w)}{w-z} dw,$$

con lo que se concluye el primer resultado. La desigualdad queda propuesta al lector. ■

**Ejemplo 3.2.2.**

*Demostrar que  $\forall n, k \in \mathbb{N}$  tales que  $n > k \geq 1$ ,*

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}} dz$$

*donde  $\Gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  es cualquier camino cerrado y simple que encierra al origen, y que se recorre en sentido antihorario.*

**Solución:**

Considerando  $f(z) = (z+1)^n$  tenemos que

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z)^{k+1}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}} dz. \end{aligned}$$

□

**Teorema 3.2.5.** (Teorema de Morera)

Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua tal que  $\forall \mathcal{R} \subseteq \Omega$  rectángulo

$$\int_{\partial \mathcal{R}} f(z) dz = 0,$$

entonces  $f$  es analítica en  $\Omega$ .

**Nota.** Este teorema es muy potente en variable compleja, pues propone otra caracterización de las funciones analíticas.

**Demostración:**

Por la Proposición (3.2.1) y la Observación (3.2.1), existe una función analítica  $F$  tal que  $F' = f$ . Por el Corolario (3.2.1), tenemos que  $F$  es  $\mathcal{C}^\infty$ , por lo tanto  $f$  analítica. ■

**Corolario 3.2.2.**

Sean  $f_n$  analíticas en  $\Omega$ , tales que para todo  $K \subseteq \Omega$  compacto,  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en  $K$ , entonces  $f$  es analítica en  $\Omega$ .

### 3.2.3. Principio de reflexión de Schwarz

**Teorema 3.2.6.**

Sea  $\Omega$  abierto y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua en  $\Omega$  y analítica excepto posiblemente en un segmento de línea. Entonces  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es analítica.

**Teorema 3.2.7.** (Principio de reflexión de Schwarz)

Supongamos que  $\Omega \subseteq \text{Im}z \geq 0$ , y  $\bar{\Omega} \cap \{\text{Im}z = 0\} = (a, b)$ . Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica y continua en  $\Omega \cup (a, b)$ , tal que  $f((a, b)) \subseteq \{\text{Im}z = 0\}$ . Entonces podemos extender  $f$  de manera analítica a  $\Omega \cup (a, b) \cup \Omega^*$  con  $\Omega^* = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in \Omega\}$ , de la forma

$$f(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in \Omega \cup (a, b) \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{si } z \in \Omega^* \end{cases}$$

**Demostración:**

La demostración queda propuesta al lector.

**Ejercicio 3.2.1.**

Sea  $f$  una función analítica en el semi-disco:  $|z| \leq 1$ ,  $\text{Im}z > 0$ , tal que  $f(z \in \mathbb{R})$  si  $|z| = 1$ ,  $\text{Im}z > 0$ . Demostrar que si definimos

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } |z| \leq 1, \text{ Im}z > 0 \\ f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) & \text{si } |z| > 1, \text{ Im}z > 0 \end{cases}$$

entonces  $g$  es analítica en el semi-plano superior.

**Ejercicio 3.2.2.**

Sea  $f : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica, continua en  $\partial D(0, 1)$  tal que  $f(z) \in \mathbb{R}$  en  $|z| = 1$ . Probar que  $f$  es constante.

**3.2.4. Los ceros de las funciones analíticas****Definición 3.2.2.**

Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  analítica, y sea  $a \in \mathbb{C}$  tal que  $f(a) = 0$ . Diremos que el orden de  $a$  es  $n$  si  $f^{(k)}(a) = 0, \forall k < n$ , y  $f^{(n)}(a) \neq 0$ .

**Proposición 3.2.4.**

Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica, con  $\Omega$  un abierto conexo. Sea  $a \in \Omega$  tal que  $f^{(n)}(a) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces  $f \equiv 0$  en  $\Omega$ .

**Demostración:**

Procedamos por contradicción. Sea  $A = \{z \in \Omega \mid \exists \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega, f(z_n) = 0, z_n \rightarrow z, z_n \neq z\}$ . Probaremos que  $A$  es abierto y que su complemento también lo es.

Probemos que  $A$  es abierto. Sea  $z \in A$ , como  $f$  admite desarrollo en serie de potencias,  $f(w) = 0 \forall w \in D(z, r_z)$ , lo que implica que  $A$  es abierto.

Sea  $z \in A^c$ , entonces

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} (w - z)^n \quad \text{con } f^{(n_0)}(z) \neq 0,$$

lo que implica que  $f \neq 0$  en  $D(z, r) \setminus \{z\}$  con  $r$  suficientemente pequeño. Entonces  $A^c$  es abierto, y como  $\Omega$  es conexo y  $A \neq \emptyset$ , con lo que concluimos que  $f \equiv 0$ . ■

**Observación 3.2.3.**

Con esta proposición, si  $f$  es analítica y  $f \neq 0$  para algún  $z_0 \in \Omega$ , el orden de un cero queda bien definido.

**Definición 3.2.3.**

Sea  $z_0$  un punto tal que  $f(z_0) = 0$ . Diremos que  $z_0$  es un cero aislado si existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(z) \neq 0$  para todo  $z \in D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ .

**Proposición 3.2.5.**

Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica con  $\Omega$  un abierto conexo. Si  $\exists z_n \rightarrow z \in \Omega$  tal que  $f(z_n) = 0$  para todo  $n$ , entonces  $f \equiv 0$  en  $\Omega$ .

**Nota.** Esta proposición implica que los ceros de las funciones analíticas son aislados.

**Proposición 3.2.6.**

Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica, con  $f(z_0) = 0$ . Entonces la función

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z-z_0} & \text{si } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0, \end{cases}$$

es analítica. Más aún, si el orden de  $z_0$  es  $k$ , entonces

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-z_0)^k} & \text{si } z \neq z_0 \\ \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} & \text{si } z = z_0, \end{cases}$$

es analítica.

**Observación 3.2.4.**

Si  $z_1, z_2, \dots, z_k$  son ceros de  $f$ , con  $z_1 \neq z_2 \neq \dots \neq z_k$ , entonces

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_k)} & \text{si } z \notin \{z_1, z_2, \dots, z_k\} \\ \frac{f'(z_1)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)\dots(z_1-z_k)} & \text{si } z = z_1 \\ \vdots & \\ \frac{f'(z_k)}{(z_k-z_1)(z_k-z_2)\dots(z_k-z_{k-1})} & \text{si } z = z_k \end{cases}$$

es analítica.

**Teorema 3.2.8.** (Teorema de Liouville)

Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica acotada, es decir existe  $M > 0$  tal que  $|f(z)| \leq M \forall z \in \mathbb{C}$ . Entonces  $f$  es constante.

**Demostración:**

Dado que  $f$  es analítica

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \quad \text{con } \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw, \quad \mathcal{C} = Re^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Analicemos los coeficientes para  $n \geq 1$ ,

$$\left| \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \right| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\theta})}{R^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \right| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\theta})}{R^{n+1} e^{in\theta}} d\theta \right|,$$

por lo tanto

$$\left| \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{M}{R^n} d\theta = \frac{2\pi M}{R^n} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Así  $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0 \forall n \geq 1$ , lo que implica que  $f \equiv 0$ . ■

**Teorema 3.2.9.** (Teorema fundamental del álgebra)

Sea  $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ , un polinomio no constante con coeficientes en  $\mathbb{C}$ , entonces  $p$  tiene al menos una raíz en  $\mathbb{C}$ .

**Demostración:**

Supongamos que  $p(z)$  no tiene raíces en  $\mathbb{C}$ , entonces  $g(z) = \frac{1}{p(z)}$  es analítica en  $\mathbb{C}$  y acotada, por el teorema de Liouville esto implica que  $g(z)$  es constante, y por lo tanto  $p(z)$  también lo cual es una contradicción. ■

**Proposición 3.2.7.**

Sea  $f$  una función analítica en  $\mathbb{C}$  tal que  $|f(z)| \leq A + B|z|^k$  con  $A, B > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Entonces  $f(z)$  es un polinomio de grado  $\leq k$ .

**Ejercicio 3.2.3.**

Sea  $f$  una función analítica en  $\mathbb{C}$  tal que  $|f(z)| \leq A + B|z|^{\frac{1}{2}}$ , probar que  $f$  es constante.

## 3.3. Aplicaciones a la Fórmula integral de Cauchy

### 3.3.1. El teorema del módulo máximo

**Teorema del módulo máximo**

**Teorema 3.3.1.** (Teorema del módulo máximo)

Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica, tal que  $f$  no es constante, entonces  $|f|$  no tiene máximos locales en  $\Omega$ .

**Demostración:**

Sean  $z \in \Omega$  y  $\delta > 0$ , y sea  $\mathcal{C} = z + \varepsilon e^{i\theta}$   $\theta \in [0, 2\pi]$  con  $\varepsilon < \delta$ , entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w - z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

Nosotros sabemos que

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + \varepsilon e^{i\theta})| d\theta \\ &\leq \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(z + \varepsilon e^{i\theta})|. \end{aligned}$$

Tenemos ahora dos posibilidades,  $|f(z)| < \max_{\theta} |f(z + \varepsilon e^{i\theta})|$  o  $|f(z)| = \max_{\theta} |f(z + \varepsilon e^{i\theta})|$ , si ocurre lo segundo tendríamos que

$$|f(z)| \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + \varepsilon e^{i\theta})| d\theta \implies |f(z)| = |f(z + \varepsilon e^{i\theta})|.$$

Si el teorema no se tuviera tendríamos que  $\exists \tilde{\delta} > 0$  tal que  $D(z, \tilde{\delta}) \subset \Omega$  y  $|f(z)| \geq |f(w)|$  para todo  $w \in D(z, \tilde{\delta})$ . Sea  $0 < \varepsilon < \tilde{\delta}$ , por lo antes visto tenemos dos posibilidades,  $\exists \theta^*$  tal que  $|f(z + \varepsilon e^{i\theta^*})| > |f(z)|$  o  $|f(z)| = |f(z + \varepsilon e^{i\theta})| \forall \theta$ , lo primero no se tiene por la suposición que hicimos de que  $|f(z)| \geq |f(w)|$ , entonces  $|f(z)| = |f(z + \varepsilon e^{i\theta})|$  y como  $\varepsilon$  es arbitrario tenemos que  $|f(z)|$  es consante en  $D(z, \tilde{\delta})$ , queda propuesto para el lector probar que si  $|f|$  es constante en  $D$  y  $f$  es analítica, entonces  $f$  es constante en  $D$ , por lo tanto  $f$  es constante en  $\Omega$ , lo cual es una contradicción. ■

**Corolario 3.3.1.** (*Principio del módulo mínimo*)

Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica no constante, entonces  $|f|$  no tiene mínimos locales a menos que  $\exists z \in \Omega$  tal que  $f(z) = 0$ .

## El lema de Schwarz

**Teorema 3.3.2.** (Lema de Schwarz)

Sea  $f : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica tal que  $|f| \leq 1$  y  $f(0) = 0$ , entonces  $|f(z)| \leq |z|$  y  $|f'(0)| \leq 1$ , más aún, si se tiene la igualdad en cualquiera de estas desigualdades, entonces  $f(z) = e^{i\theta} z$  para algún  $\theta$ .

**Demostración:**

Sea  $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ , la cual es analítica en  $D(0, 1)$ , supongamos que  $g$  no es constante. Sea  $z_0 \in D(0, 1)$  arbitrario. Por el teorema del módulo máximo  $\max_{z \in D(0, r)} |g(z)|$  se alcanza en la frontera  $\partial D(0, r)$ . Tomando  $r$  cercano a 1, obtenemos  $|g(z_0)| < \frac{|f(\tilde{z})|}{|\tilde{z}|}$  para un  $\tilde{z} \in \partial D(0, r)$ , lo que implica que  $|g(z_0)| \leq \frac{1}{r}$  y como  $r$  es arbitrario  $|g(z_0)| \leq 1$  es decir  $|f(z_0)| \leq |z_0|$  y  $|f'(0)| \leq 1$ .

Si  $g$  fuera constante,  $g(z) = c$ , entonces  $f(z) = cz$ , con  $c \leq 1$ .

Si para algún  $z \in D(0, 1)$  tal que  $|f(z)| = |z|$ , entonces  $|g|$  alcanza su máximo en el interior, lo que implicaría que  $g$  es constante, y entonces  $g(z) = e^{i\theta}$ . ■

Gracias al teorema del módulo máximo y al lema de Schwarz, se tienen diversas aplicaciones, varias de las cuales mencionaremos.

### Proposición 3.3.1.

Sea  $f : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$  una función analítica biyectiva con  $f^{-1} : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$  también es analítica y que cumple  $f(0) = 0$ , entonces  $f(z) = e^{i\theta}z$  para algún  $\theta$ .

### Demostración:

Por el lema de Schwarz tenemos que  $|f(z)| \leq |z| \forall z \in D(0, 1)$  y  $|f^{-1}(w)| \leq |w| \forall w \in D(0, 1)$ , tenemos que  $|w| = |f(f^{-1}(w))| \leq |f^{-1}(w)| \leq |w| \implies |f^{-1}(w)| = |w|$ .

Análogamente tenemos que  $|f(z)| = |z|$  y por el lema de Schwarz  $f(z) = e^{i\theta}z$ . ■

### Proposición 3.3.2.

Sea  $f : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$  una función analítica biyectiva con inversa analítica, y sea  $\alpha \in D(0, 1)$  tal que  $f(\alpha) = 0$ , entonces  $f(z) = e^{i\theta} \left( \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} \right)$ .

### Demostración:

Sea  $g(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$ , entonces la función  $f \circ g^{-1} : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$  es analítica biyectiva con inversa analítica, y cumple que  $f \circ g^{-1}(0) = 0$ . Por la Proposición (3.3.1) se tiene que

$$f \circ g^{-1}(z) = e^{i\theta}z \text{ es decir } f(z) = f \circ g^{-1}(g(z)) = e^{i\theta}g(z) = e^{i\theta} \left( \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} \right).$$

■

### Ejemplo 3.3.1.

1. Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica tal que  $|f| = 1$  en  $\partial D(0, 1)$ , probar que  $f(z) = e^{i\theta}z^n$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Sea  $f : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$  una función analítica tal que  $f(\frac{1}{2}) = 0$ , encontrar la mejor cota para  $|f(\frac{3}{4})|$ .

**Solución:**

1. Por el teorema del módulo máximo si  $f$  no es constante, entonces  $f : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$ . Sean ahora  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  los ceros de  $f$  en  $D(0, 1)$  contados con su multiplicidad. La función  $\left(\frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z}\right)$  tiene módulo 1 para  $|z| = 1$ , y la función  $g(z) = \frac{f(z)}{\prod_{k=1}^n \left(\frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z}\right)}$  es analítica en  $D(0, 1)$ ,  $g(z) \neq 0$  en  $D(0, 1)$ , y  $|g| = 1$  en  $\partial D(0, 1)$ . Entonces, por el teorema del módulo máximo,  $|g(z)| \leq 1$  en  $D(0, 1)$ , y como  $g(z) \neq 0$  por el principio del módulo mínimo  $|g(z)| \geq 1$  en  $D(0, 1)$ , con lo que tenemos que  $g(z) = e^{i\theta}$  para algún  $\theta$ . Luego

$$f(z) = e^{i\theta} \prod_{k=1}^n \left( \frac{z - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_k z} \right) \quad \forall z \in D(0, 1).$$

Ahora supongamos que existe algún  $k$  tal que  $1 \leq k \leq n$  y  $\alpha_k \neq 0$ . Si fuese así tendríamos que el radio de convergencia de la serie de  $f$  en torno a cero debería ser  $\min \left\{ \left| \frac{1}{\alpha_j} \right| : 1 \leq j \leq n \text{ y } \alpha_j \neq 0 \right\}$  lo cual contradice que  $f$  sea analítica en  $\mathbb{C}$ . Por lo tanto  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ , y así  $f(z) = e^{i\theta} z^n$ .  $\square$

2. Consideramos

$$g(z) = \frac{f(z)}{\left(\frac{z-\frac{1}{2}}{1-z\frac{1}{2}}\right)}.$$

Como  $g : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$ , tenemos que  $|g(\frac{3}{4})| \leq 1$  y entonces

$$\left| f\left(\frac{3}{4}\right) \right| \leq \left| \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}} \right| = \frac{2}{5}.$$

La cota es óptima pues si tomamos la función  $f(z) = \left(\frac{z-\frac{1}{2}}{1-z\frac{1}{2}}\right)$  la cota se alcanza.

**Ejercicio 3.3.1.**

Probar que las únicas funciones analíticas biyectivas que llevan  $\text{Im}z > 0$  a  $D(0, 1)$  son de la forma

$$h(z) = e^{i\theta} \left( \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}} \right) \quad \alpha \in \{\text{Im}z > 0\}.$$

**El Teorema de la Aplicación Abierta****Teorema 3.3.3.** (Teorema de la aplicación abierta)

Sea  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica no constante, con  $\mathcal{U}$ . Si  $\Omega \subseteq \mathcal{U}$  abierto, entonces  $f(\Omega)$  es abierto.

**Demostración:**

Sea  $\alpha \in \Omega$ , debemos demostrar que  $\exists \varepsilon > 0$  tal que  $D(f(\alpha), \varepsilon) \subseteq f(\Omega)$ . Sea  $\delta > 0$  tal que  $D(\alpha, \delta) \subset \Omega$  y consideremos  $f(z) - f(\alpha)$ . Consideremos  $\eta = \min_{\partial D(\alpha, \delta)} |f(z) - f(\alpha)|$ , tomando  $\delta$  suficientemente pequeño,  $\eta > 0$  pues los ceros de las funciones analíticas son aislados. Para  $w \in D(f(\alpha), \frac{\eta}{2})$ , queremos demostrar que existe  $z \in D(\alpha, \delta)$  tal que  $f(z) = w$ . En  $\partial D(\alpha, \delta)$ ,

$$\begin{aligned} |f(z) - w| &\geq |f(z) - f(\alpha)| - |f(\alpha) - w| \\ &> \eta - \frac{\eta}{2} \\ &= \frac{\eta}{2}. \end{aligned}$$

Por otra parte si  $z = \alpha$ ,  $|f(\alpha) - w| < \frac{\eta}{2}$ , pues  $w \in D(f(\alpha), \frac{\eta}{2})$ , pero  $\min |f(z) - w| \geq \frac{\eta}{2}$  en la frontera, luego por el principio del módulo mínimo la función tiene que anularse en algún punto, es decir,  $\exists z \in D(\alpha, \delta)$  tal que  $f(z) - w = 0$ . ■

**Corolario 3.3.2.**

Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathcal{U}$  una función analítica biyectiva, entonces  $f^{-1}$  es continua.

**Ejercicio 3.3.2.**

- (a) Sea  $f$  una función analítica y no constante en  $S$ , y sea  $T = f(S)$ . Demuestre que si  $f(z)$  es un punto de la frontera de  $T$ , entonces  $z$  es un punto de la frontera de  $S$ .
- (b) Demuestre que el recíproco es, en general, falso. Para ello considere, por ejemplo, la función  $f(z) = z^2$  en la región

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2, \operatorname{Re} z < 0\}.$$

# Capítulo 4

## Funciones Meromorfas

En el siguiente capítulo extenderemos la noción de desarrollos en series para funciones más generales que las enteras y comenzaremos el análisis de estas.

### 4.1. Dominios simplemente conexos

#### Definición 4.1.1.

Diremos que  $D$  es una región o dominio en  $\mathbb{C}$  si  $D$  es un abierto conexo.

#### Definición 4.1.2.

Sean  $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow D$  dos curvas cerradas rectificables en una región  $D$ . Se dirá que  $\gamma_0$  es homótopa a  $\gamma_1$  en  $D$  si existe una función continua  $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$  tal que

$$\begin{cases} \Gamma(s, 0) = \gamma_0(s) & \text{y} & \Gamma(s, 1) = \gamma_1(s) & \forall s \in [0, 1] \\ \Gamma(0, t) = \Gamma(1, t) & \forall t \in [0, 1]. \end{cases} \quad (4.1)$$

Denotaremos  $\gamma_0 \sim \gamma_1$ .

#### Proposición 4.1.1.

La relación  $\gamma_0 \sim \gamma_1$  define una relación de equivalencia.

#### Demostración:

Es claro que  $\gamma_0$  es homótopa a sí misma. Si  $\gamma_0 \sim \gamma_1$  y  $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$  satisface la condición (4.1) entonces basta definir  $\Lambda(s, t) = \Gamma(s, 1 - t)$  para ver que  $\gamma_1 \sim \gamma_0$ . Finalmente si  $\gamma_0 \sim \gamma_1$  y  $\gamma_1 \sim \gamma_2$  con  $\Gamma$  y  $\Lambda$  satisfaciendo las condiciones (4.1) respectivamente para cada una

de las relaciones, entonces definimos

$$\varphi(s, t) = \begin{cases} \Gamma(s, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \Lambda(s, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

con lo que  $\gamma_0 \sim \gamma_2$ .

**Teorema 4.1.1.**

Si  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  son dos curvas cerradas rectificables en una región  $D$  y además  $\gamma_0 \sim \gamma_1$ , entonces

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

para toda función  $f$  analítica en  $D$ .

**Demostración:**

Sea  $I = [0, 1]$  y  $\Gamma : I^2 \rightarrow D$  la función dada por (4.1). Puesto que  $\Gamma$  es continua e  $I^2$  es compacto tenemos que  $\Gamma$  es uniformemente continua y  $\Gamma(I^2)$  es un compacto en  $D$ . Sea  $r = \text{dist}(\Gamma(I^2), \mathbb{C} \setminus D)$  y sea  $n \in \mathbb{N}$  tal que si  $(s - s')^2 + (t - t')^2 < 4/n^2$  entonces

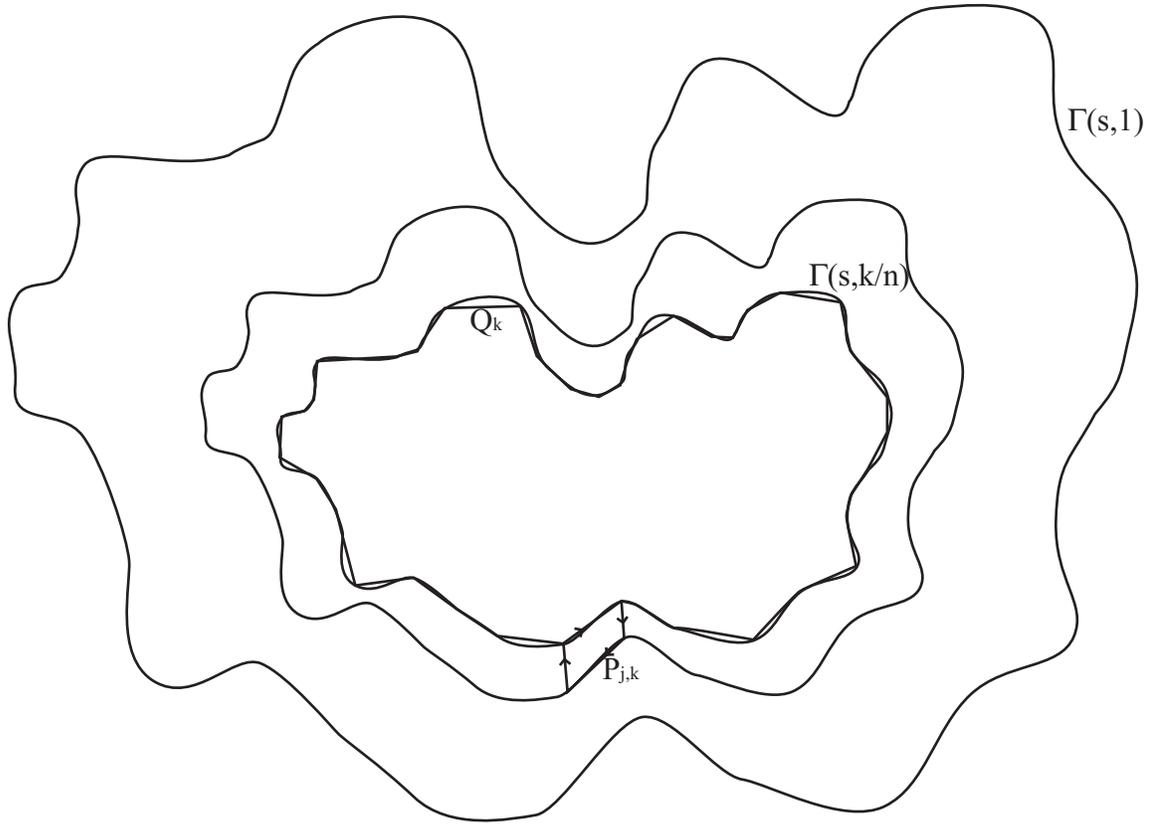
$$|\Gamma(s, t) - \Gamma(s', t')| < r.$$

Denotemos

$$Z_{j,k} = \Gamma\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right), \quad 0 \leq j, k \leq n \quad \text{y}$$

$$J_{j,k} = \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \times \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \quad 0 \leq j, k \leq n.$$

Dado que el diámetro de  $J_{j,k}$  es  $\sqrt{2}/n$ , se sigue por la continuidad de  $\Gamma$  que  $\Gamma(J_{j,k}) \subset D(Z_{j,k}; r)$ . Llamemos  $P_{j,k}$  al camino poligonal cerrado de vértices  $Z_{j,k}, Z_{j+1,k}, Z_{j,k+1}, Z_{j+1,k+1}$  y dado que los discos son convexos,  $P_{j,k} \subset B(Z_{j,k}; r)$ .



Pero por el Teorema (3.1.3)

$$\int_{P_{j,k}} f = 0 \tag{4.2}$$

para toda función analítica en  $D$ . Sea  $Q_k$  el camino poligonal cerrado de vértices  $Z_{0,k}, Z_{1,k}, \dots, Z_{n,k}$ . Mostraremos que  $\int_{\gamma_0} f = \int_{Q_0} f = \dots = \int_{Q_n} f$ . Para ver que  $\int_{\gamma_0} f = \int_{Q_0} f$  notemos que si  $\sigma_j(t) = \gamma_0(t)$  para  $t \in [j/n, (j+1)/n]$  entonces  $\sigma_j + [Z_{j+1,0}, Z_{j0}]$  ( el "+" indica que  $\sigma_j$  es seguido por el polígono) es una curva cerrada rectificable en el disco  $D(Z_{j,0}; r) \subset D$ . Así

$$\int_{\sigma_j} f = - \int_{[Z_{j+1,0}, Z_{j0}]} f = \int_{[Z_{j0}, Z_{j+1,0}]} f.$$

Sumando a ambos lados de la ecuación sobre  $0 \leq j \leq n$  se tiene  $\int_{\gamma_0} f = \int_{Q_0} f$  y similarmente  $\int_{\gamma_1} f = \int_{Q_n}$ .

Nos falta ver que  $\int_{Q_k} f = \int_{Q_{k+1}}$ . Para eso ocupemos la ecuación (4.2), la cual nos entrega

$$0 = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{P_{j,k}} f. \tag{4.3}$$

Debemos observar que la integral  $\int_{P_{jk}} f$  incluye la integral sobre el trazo  $[Z_{j+1,k}, Z_{j+1,k+1}]$  que es el opuesto a la integral sobre  $[Z_{j+1,k+1}, Z_{j+1,k}]$  que es parte de la integral  $\int_{P_{j+1,k}} f$ . Así

$$Z_{0k} = \Gamma\left(0, \frac{k}{n}\right) = \Gamma\left(1, \frac{k}{n}\right) = Z_{nk},$$

con lo que  $[Z_{0,k+1}, Z_{0k}] = -[Z_{1k}, Z_{1,k+1}]$ . Tomando en consideración las cancelaciones producidas por el efecto anterior, la ecuación (4.3) queda como

$$0 = \int_{Q_k} f - \int_{Q_{k+1}} f$$

lo que completa la demostración.  $\square$

**Nota:**

A partir de este momento  $D$  denotará una región.

**Definición 4.1.3.**

Sea  $\gamma$  una curva rectificable en  $D$ . Diremos que  $\gamma$  es homótopa a cero ( $\gamma \sim 0$ ) si  $\gamma$  es homótopa a una curva constante.

**Definición 4.1.4.**

Un dominio  $D$  se dirá simplemente conexo si para toda curva cerrada  $\gamma$  en  $D$  se cumple que  $\gamma \sim 0$ .

**Teorema 4.1.2.** (Teorema de Cauchy)

Si  $D$  es simplemente conexo y  $\gamma$  es una curva cerrada rectificable, entonces

$$\int_{\gamma} f = 0$$

para todo función analítica  $f$ .

**Demostración:**

Directa ocupando el Teorema 4.1.1.  $\square$

**Corolario 4.1.1.**

Si  $D$  es simplemente conexo y  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  es una función analítica en  $D$  entonces  $f$  tiene primitiva en  $D$ .

**Demostración:**

Sea  $a \in D$  fijo y  $z \in D$ . Como  $D$  es conexo existe una curva  $\gamma$  que une los puntos  $a$  y  $z$ . Definamos

$$F(z) = \int_{\gamma} f(w)dw.$$

Notemos que  $F$  está bien definida, es decir, que es independiente del camino escogido. En efecto, si  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son dos caminos que unen  $a$  con  $z$ , entonces  $\Gamma = \gamma_1 - \gamma_2$  es una curva cerrada y por el teorema 4.1.2

$$\int_{\Gamma} f(w)dw = 0 \quad \text{por lo que} \quad \int_{\gamma_1} f(w)dw = \int_{\gamma_2} f(w)dw.$$

Dado que  $F$  es analítica, se procede como en la demostración de la proposición de existencia de primitiva para mostrar que  $F'(z_0) = f(z_0)$ , lo que prueba el resultado.  $\square$

### Ejemplo 4.1.1.

Sea  $D$  simplemente conexo y  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica tal que  $f(z) \neq 0$  para todo  $z$  en  $D$ . Entonces existe una función analítica  $g : D \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f(z) = \exp g(z)$ . Además si  $z_0 \in D$  y  $e^{w_0} = f(z_0)$ , podemos escoger  $g$  tal que  $g(z_0) = w_0$ .

#### Solución:

Dado que la función  $f$  no tiene ceros se tiene que  $f'/f$  es analítica en  $D$  y por el corolario anterior posee una primitiva  $g_1$ . Sea  $h(z) = \exp g_1(z)$  analítica que nunca se anula. Es fácil probar que  $f/h$  es constante por lo que

$$f(z) = ce^{g_1(z)} = e^{[g_1(z)+c']}$$

para alguna constante  $c'$ . Llamando  $g(z) = g_1(z) + c' + 2\pi ik$  para un  $k$  apropiado, tendremos que  $g(z_0) = w_0$ .

### Ejercicio 4.1.1.

1. Sea  $D$  una región y sean  $\sigma_1, \sigma_2 : [0, 1] \rightarrow D$  curvas constantes  $\sigma_1 \equiv a$ ,  $\sigma_2 \equiv b$ . Muestre que si  $\gamma$  es una curva cerrada rectificable en  $D$  y  $\gamma \sim \sigma_1$  entonces  $\gamma \sim \sigma_2$ . *Hint: Conecte  $a$  y  $b$  por una curva.*
2. Sea  $\gamma(\theta) = \theta e^{i\theta}$  para  $\theta \in [0, 2\pi]$  y  $\gamma(\theta) = 4\pi - \theta$  para  $\theta \in [2\pi, 4\pi]$ . Evalúe

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + \pi^2}.$$

3. Sea  $D$  simplemente conexo tal que no contiene al origen. Pruebe que existe una función inyectiva y analítica  $f$  tal que  $f'(z) = 1/z$ .
4. Muestre que en dominios simplemente conexos que no contienen al origen se puede definir la función  $z^\alpha$ .

### Ejercicio 4.1.2. Calcule las integrales de Fresnel

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx \quad \int_0^\infty \sin x^2 dx$$

*Hint: Considere un sector angular de ángulo  $\pi/4$ , la función  $e^{iz^2}$  y recuerde la siguiente desigualdad*

$$\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta \quad \forall \theta \in [0, \pi/2].$$

**Ejercicio 4.1.3.** *Evalué la siguiente integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} \cos(2\alpha \lambda x) dx.$$

*Hint: Considere la función  $f(z) = e^{-\lambda z^2}$  y un rectángulo de altura  $\alpha$ .*

## 4.2. Series de Laurent

**Definición 4.2.1.**

*Diremos que*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k = L,$$

*sí y sólo sí las series  $\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_{-k}$  convergen a  $L^+$  y  $L^-$  respectivamente y se tiene que  $L^+ + L^- = L$ .*

De esta forma, trataremos de definir una función analítica de la siguiente forma

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - a)^k,$$

donde  $a \in \mathbb{C}$  es un punto dado y  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  es una familia de números complejos indexada por los enteros. Observemos que a diferencia de una serie de potencias, en esta representación, denominada serie de Laurent, intervienen tanto potencias positivas como negativas de  $(z - a)$ . Para esto analicemos el comportamiento de la serie en un anillo.

**Proposición 4.2.1.**

*Sea*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^{-k}$$

*y sean*

$$R_1 = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}},$$

$$R_2 = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}}.$$

*Supongamos  $R_1, R_2 > 0$ , entonces*

1. Si  $1/R_2 > R_1$ , entonces la serie no converge en ningún abierto de  $\mathbb{C}$ .
2. Si  $1/R_2 < R_1$ , entonces la serie converge en el anillo  $1/R_2 < |z| < R_1$ .
3. Si  $1/R_2 = 0$ ,  $R_1 = \infty$ , entonces la serie converge absolutamente en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Más aún, si se satisface (i) o (ii) la función  $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$  es analítica en el anillo  $1/R_2 < |z| < R_1$

La demostración queda propuesta para el lector.

**Definición 4.2.2.**

Llamaremos parte principal de la serie de Laurent a

$$P(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^{-k}.$$

**Nota:**

Denotaremos por  $A_{r_1, r_2}(z_0)$  al anillo  $r_1 < |z - z_0| < r_2$ .

El siguiente teorema muestra que las funciones analíticas poseen una representación en serie de Laurent.

**Teorema 4.2.1. (Teorema de Laurent)**

Sea  $f$  una función analítica en  $A_{r_1, r_2}(z_0)$ , entonces  $f$  admite la representación

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$$

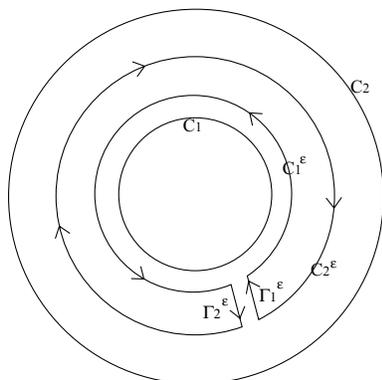
en  $A_{r_1, r_2}(z_0)$ .

**Demostración:**

Sin pérdida de generalidad tomamos  $z_0 = 0$ . Consideremos la función analítica

$$g(w) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \quad z \in A_{r_1, r_2}(0),$$

y el camino  $\Gamma^\varepsilon = C_2^\varepsilon - C_1^\varepsilon + \Gamma_1^\varepsilon - \Gamma_2^\varepsilon$ , como se indica en la figura.



Dado que  $g$  es analítica y  $\Gamma^\varepsilon$  está contenido en un dominio simplemente conexo, se tiene que

$$\int_{\Gamma^\varepsilon} g(w)dw = 0.$$

Es fácil ver que tomando  $\varepsilon \rightarrow 0$  se tiene que

$$\int_{C_2} g(w)dw - \int_{C_1} g(w)dw = 0,$$

donde los círculos  $C_1, C_2$  están orientados en sentido antihorario. Desarrollando la expresión anterior obtenemos que

$$\int_{C_2} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw - \int_{C_1} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = 0 \quad \text{de donde}$$

$$\int_{C_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} dw = f(z) \left[ \int_{C_2} \frac{1}{w - z} dw - \int_{C_1} \frac{1}{w - z} dw \right].$$

Como

$$\int_{C_2} \frac{1}{w - z} dw = 2\pi i \quad \text{y}$$

$$\int_{C_1} \frac{1}{w - z} dw = 0,$$

entonces

$$2\pi i f(z) = \int_{C_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Ahora bien si  $w \in C_2$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|w| > |w| - \delta > |z|$ , luego

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w} \frac{1}{1 - z/w} = \frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^n.$$

Dado que la convergencia en el interior es uniforme, se puede concluir que

$$\int_{C_2} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{C_2} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw.$$

De manera análoga, si  $w \in C_1$  existe  $\delta$  tal que  $|w| < |z| - \delta < |z|$ , luego

$$\frac{1}{w-z} = \frac{-1}{z-w} = \frac{-1}{z} \frac{1}{1-w/z} = \frac{-1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z}\right)^n,$$

de donde

$$\int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \int_{C_1} f(w) w^n dw,$$

y así

$$2\pi i f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{C_2} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \int_{C_1} f(w) w^n dw.$$

Es claro que la representación es independiente de las curvas escogidas, dado que  $f$  es analítica en el interior del anillo.

Encontraremos una fórmula explícita para los coeficientes de la serie, con lo cual queda únicamente determinada la expansión. Si

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$$

$$f(z) z^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^{k+n},$$

entonces integrando en un círculo centrado  $C$ , se concluye que

$$2\pi i c_{-n-1} = \int_C f(z) z^n dz. \square$$

**Ejemplo 4.2.1.**

Calcule la serie de Laurent de  $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$  en  $|z| > 1$ .

**Solución:**

Consideremos  $w = z^2$ , luego

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+w)^2} &= -\frac{d}{dw} \frac{1}{1+w} \\ &= -\frac{d}{dw} \frac{1}{w} \left( \frac{1}{1 - (-1/w)} \right) \\ &= -\frac{d}{dw} \frac{1}{w} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{-1}{w} \right)^k \\ &= \frac{d}{dw} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{-1}{w} \right)^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left( \frac{-1}{w} \right)^{k+2}. \end{aligned}$$

Volviendo ahora a la variable  $z$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{-1}{z^2} \right)^{k+2}.$$

**Ejemplo 4.2.2.**

Encuentre la expansión en serie de Laurent de  $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$  en

1.  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ .
2.  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 1| < 1\}$ .
3.  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ .

**Solución:**

Desarrollaremos el segundo caso, los otros quedan propuestos. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(1-z)} &= \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} \\ &= \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z+1-1} \\ &= \frac{1}{z-1} + \frac{-1}{1 - (-(z-1))} \\ &= \frac{-1}{z-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k, \end{aligned}$$

la cual converge en anillo deseado.

### 4.3. Clasificación de singularidades

#### Definición 4.3.1.

Sea  $f$  analítica en  $D(0, 1) \setminus \{0\}$ , cuya representación en serie de Laurent está dada por

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Diremos que

1.  $0$  es singularidad removible si  $c_k = 0$  para todo  $k \leq -1$ .
2.  $0$  es polo si existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $c_{-k} = 0$  para todo  $k > N$  y  $c_{-N} \neq 0$ .
3.  $0$  es singularidad esencial si existe  $n_k \rightarrow \infty$  tal que,  $c_{-n_k} \neq 0$ .

#### Definición 4.3.2.

Una singularidad  $z_0$  de  $f$  se dice aislada si existe  $r > 0$  tal que  $z_0$  es la única singularidad de  $f$  en  $D(z_0, r)$ .

#### Ejercicio 4.3.1.

Sea  $f$  analítica en  $\Omega = D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ , entonces  $z_0$  es una singularidad removible si y solo si existe una función analítica  $h$  en  $D(z_0, \delta)$ , tal que  $h|_{\Omega} = f$ .

#### Proposición 4.3.1.

Si  $f$  tiene una singularidad aislada en  $z_0$  y

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0,$$

entonces la singularidad  $z_0$  es removible

#### Demostración:

Sea

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)f(z) & \text{si } z \neq z_0 \\ 0 & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

la cual es continua en  $D(z_0, r)$  y analítica en  $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ . Debido a que  $g(z_0) = 0$  se tiene que

$$g(z) = (z - z_0)h(z),$$

con  $h(z)$  analítica en  $D(z_0, r)$ , con lo que se concluye

$$h(z) = f(z) \quad \forall z \neq z_0,$$

por lo que  $z_0$  es singularidad removible.  $\square$

**Ejemplo 4.3.1.** *Pruebe que una singularidad aislada de  $f$  no puede ser polo de  $e^f$ .*

**Solución:**

Sea  $z_0$  la singularidad,  $r > 0$  tal que en  $f$  es analítica en  $\Omega = D(0, r) \setminus \{z_0\}$ . Analicemos por casos.

1. Si  $z_0$  es removible, entonces existe  $g$  analítica en  $D(0, r)$  tal que  $g|_{\Omega} = f$ . Luego es fácil ver que  $e^g$  es analítica en  $D(0, r)$  y se cumple que  $e^g|_{\Omega} = e^f$ .
2. Si  $z_0$  es polo de orden  $m$ . Razonemos por contradicción, es decir, supongamos que  $e^f$  tiene un polo de orden  $m'$ . Sabemos que cerca de  $z_0$ , la función  $e^f$  se comporta como

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^{m'}} h(z),$$

donde  $h(z)$  es una función analítica. Llamemos  $g(z) = e^{f(z)}$  y tomemos derivada logarítmica. Por un lado tenemos

$$\begin{aligned} \frac{g'(z)}{g(z)} &= \frac{e^{f(z)} f'(z)}{e^{f(z)}} \\ &= f'(z). \end{aligned}$$

Ahora, si consideramos la fórmula explícita para  $g$  se tiene que

$$g'(z) = \frac{h'(z)}{(z - z_0)^{m'}} + \frac{m' h(z)}{(z - z_0)^{1-m'}},$$

de modo que

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = h'(z) + m'(z - z_0)^{-1},$$

lo que nos entrega una fórmula para comparar  $f'(z)$ .

Ahora bien  $f(z)$  se comporta como  $(z - z_0)^{-m}$  y por lo tanto  $f'(z)$  se comportara como  $(z - z_0)^{-(m+1)}$ , así, igualando los ordenes de los polos, se concluye que

$$m + 1 = 1 \Rightarrow m = 0,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $e^f$  no puede tener polos.

3. La demostración de este caso es análoga a la anterior. Se le sugiere al lector completar los detalles.

**Teorema 4.3.1.** *(Teorema de Casorati-Weierstrass)*

*Si  $f$  tiene una singularidad esencial en  $z_0$ , entonces  $\forall \delta > 0$  el conjunto*

$$\{f(z) : z \in D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}\}$$

*es denso en  $\mathbb{C}$ .*

**Demostración:**

Razonemos por contradicción. Sea  $\delta > 0$  y supongamos que existe  $w$  tal que

$$|f(z) - w| > \eta \quad \forall z \in D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}.$$

De esta forma la función  $g(z) = \frac{1}{f(z)-w}$  resulta ser analítica en  $D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$  y acotada en  $z_0$ , por lo que puede ser extendida a  $D(z_0, \delta)$ . Despejando de la ecuación anterior  $f(z)$

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)} \Rightarrow f(z) = \frac{wg(z) + 1}{g(z)}$$

De esta forma, si  $g(z_0) \neq 0$ , entonces  $z_0$  resulta ser una singularidad removible y si  $g(z_0) = 0$ , entonces  $z_0$  es un polo de  $f$ , lo cual contradice que  $z_0$  es una singularidad esencial de  $f$ .  $\square$

**Ejemplo 4.3.2.** Encuentre la imagen de  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ .

**Solución:** Al resolver  $w = e^{1/z}$ , obtenemos

$$\frac{1}{z} = \log(|w|) + i \operatorname{Arg}(w) + 2k\pi i,$$

lo cual define una secuencia

$$z_k = \frac{1}{\log(|w|) + i \operatorname{Arg}(w) + 2k\pi i},$$

expresión que tiende a 0 cuando  $k$  tiende a infinito. Escogiendo  $\delta$  adecuadamente tendremos que  $\{e^{1/z} : 0 < |z| < \delta\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**Ejercicio 4.3.2.** Sea  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una secuencia en  $\Omega = D(z_0, 1) \setminus \{z_0\}$ , que converge a  $z_0$ , y sea  $f : \Omega \setminus \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{C}$ , tal que  $z_n$  es un polo de  $f$  para todo  $n$ . Demuestre que el conjunto  $\{f(z) \mid z \in \Omega \setminus \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}\}$  es denso en  $\mathbb{C}$ .

**Ejercicio 4.3.3.** Sea  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  analítica. Demuestre que  $g(\mathbb{C})$  es denso en  $\mathbb{C}$ .

*Hint: Demuéstrelo si  $g$  es un polinomio. Para el caso general considere la función  $g(1/z)$ .*

## 4.4. Teorema de los residuos y sus consecuencias

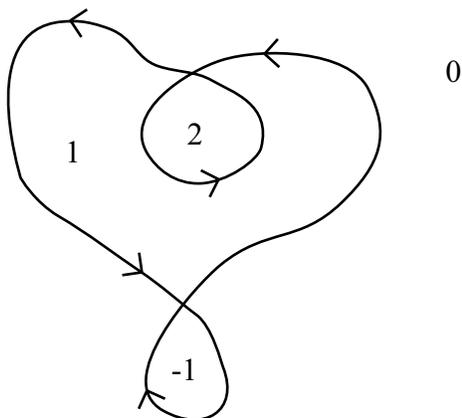
### Definición 4.4.1.

Sea  $\gamma$  una curva cerrada rectificable y  $a \notin \gamma$ . Se define el índice de  $\gamma$  con respecto a  $a$  como

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz.$$

**Nota:**

Intuitivamente, el índice representa el número de vueltas que recorre  $\gamma$  en torno a  $a$ .

**Proposición 4.4.1.**

Para todo  $z \in \mathbb{C}$  se tiene  $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$ .

**Demostración:**

Por el Teorema (3.1.3) nos reducimos al caso de una curva diferenciable por pedazos. Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una parametrización de la curva. Por definición se tiene

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt.$$

Sea ahora

$$h(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds,$$

la cual resulta ser continua, con  $h(a) = 0$  y  $h'$  continua por pedazos. Consideremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^{-h(t)}(\gamma(t) - z)) &= -h'(t)e^{-h(t)}(\gamma(t) - z) + e^{-h(t)}\gamma'(t) \\ &= \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} e^{-h(t)}(\gamma(t) - z) + e^{-h(t)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

De esta forma concluimos que  $e^{-h(t)}(\gamma(t) - z)$  es constante en  $[a, b]$ , es decir

$$e^{-h(t)}(\gamma(t) - z) = c.$$

Evaluando en  $t = a$ , se tiene que  $c = \gamma(a) - z$  y luego evaluando en  $b$

$$e^{-h(b)} = \frac{\gamma(a) - z}{\gamma(b) - z} = 1$$

pues  $\gamma(a) = \gamma(b)$  por ser una curva cerrada. Finalmente se concluye que  $h(b) = 2\pi ik$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , lo cual implica que  $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

### Propiedades:

A continuación se listarán algunas propiedades del índice.

1.  $n(-\gamma, z) = -n(\gamma, z)$ .
2. Si  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$  con  $\gamma_i$  cerrada y orientada consistentemente, se tiene que

$$n(\gamma, z) = \sum_{i=1}^n n(\gamma_i, z).$$

3.  $n(\gamma, z)$  es constante en cada componente conexa de  $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ .
4. Si  $\gamma \subset D(0, R)$  entonces  $n(\gamma, z) = 0$  para  $|z| > R$ .

### Demostración:

Las propiedades 1) y 2) se dejan propuestas al lector.

Demostremos 3). Para eso, bastara mostrar que  $n(\gamma, z)$  es continua como función de  $z$ . En efecto, si  $\gamma(t)$  es una parametrización de  $\gamma$ , se tiene

$$\begin{aligned} n(\gamma, z) - n(\gamma, w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \left[ \frac{1}{\gamma(t) - z} - \frac{1}{\gamma(t) - w} \right] \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{\gamma'(t)(z - w)}{(\gamma(t) - z)(\gamma(t) - w)} dt. \end{aligned}$$

Así, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta$  tal que si  $|z - w| < \delta$ , entonces

$$(n(\gamma, z) - n(\gamma, w)) < \varepsilon,$$

por lo que el índice resulta ser continuo en cada componente conexa.

Para 4) basta notar que

$$f(w) = \frac{1}{z - w},$$

es analítica en  $D(0, R)$ , por lo que se tiene que

$$\int_{\gamma} \frac{1}{w - z} dw = 0. \square$$

### Ejercicio 4.4.1.

Muestre que hay solo una componente conexa de  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  que es no acotada.  
Hint: Use la esfera de Riemann y la proyección.

**Proposición 4.4.2.**

Sea  $\gamma$  una curva cerrada que no pasa por cero y sean  $z_1, z_2 \in \gamma$ . Denotamos por  $\gamma_1$  el arco de  $\gamma$  que va de  $z_1$  a  $z_2$  (en la dirección dada por  $\gamma$ ) y  $\gamma_2$  al arco en la dirección de  $\gamma$  que va de  $z_2$  a  $z_1$ . Supongamos además que  $z_1 \in \text{Im}(z) < 0$  y  $z_2 \in \text{Im}(z) > 0$ . Si  $\gamma_1$  no toca el eje real negativo y  $\gamma_2$  no toca el eje real positivo, entonces  $n(\gamma, 0) = 1$ .

**Definición 4.4.2.**

Una curva continua, simple y cerrada se dice una curva de Jordan.

**Teorema 4.4.1.** (Teorema de las curvas de Jordan)

Sea  $\gamma$  una curva de Jordan, el conjunto  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  tiene exactamente dos componentes conexas, con  $\gamma$  su frontera común. Una de estas componentes es acotada y la otra es no acotada.

**Observación 4.4.1.**

El teorema anterior es un resultado profundo de la topología y su demostración escapa la naturaleza de este apunte. De todos modos, se puede consultar por la demostración en P.S. Aleksandrov "Combinatorial Topology" Vol.1, Graylock Press, Rochester, N.Y.(1956), Chap.2.

**Definición 4.4.3.**

Sea  $f$  una función analítica en  $D \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ . Para la singularidad  $z_k$  consideramos la expansión en serie de Laurent en torno a  $z_k$  de  $f$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^k (z - z_k)^n.$$

Definimos el residuo de  $f$  en  $z_k$  como

$$\text{Res}(f, z_k) = c_{-1}^k.$$

**Teorema 4.4.2.** (Teorema de los residuos)

Sea  $f$  analítica en  $D \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$  con  $D$  simplemente conexo y  $\{z_1, \dots, z_k\}$  singularidades aisladas. Sea  $\gamma$  una curva cerrada en  $D$  tal que  $z_i \notin \gamma \forall i = 1, \dots, k$ , entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^k n(\gamma, z_i) \text{Res}(f, z_i).$$

**Demostración:**

Sea

$$P_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}^j (z - z_j)^{-n}$$

la parte principal del desarrollo en serie de Laurent en torno al polo  $z_j$ , la cual converge uniformemente en compactos de  $D \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ . Consideremos ahora

$$g(z) = f(z) - P_1(z) - P_2(z) - \dots - P_k(z),$$

definido en  $D \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$ . Cerca de  $z_j$ ,  $f$  se escribe como

$$f(z) = P_j(z) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n^j (z - z_j)^n.$$

Luego reemplazando esto en  $g$  tenemos

$$g(z) = P_j(z) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n^j (z - z_j)^n - \sum_{j=0}^n P_j(z).$$

Así  $\{z_1, \dots, z_k\}$  resultan ser singularidades removibles  $g$ , por lo que  $\int_{\gamma} g(z) dz = 0$ . Más explícitamente

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \sum_{j=1}^k \int_{\gamma} P_j(z) dz \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{n=0}^{\infty} c_n^j \int_{\gamma} (z - z_j)^{-n} dz \\ &= \sum_{j=1}^k c_{-1}^j n(\gamma, z_j) 2\pi i \\ &= 2\pi i \sum_{i=0}^k n(\gamma, z_i) Res(f, z_i). \square \end{aligned}$$

#### Observación 4.4.2.

Si  $z_k$  es un polo de  $f$  de orden  $n$ , entonces

$$f(z) = c_{-n}(z - z_k)^{-n} + \dots + c_{-1}(z - z_k)^{-1} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i (z - z_k)^i,$$

multiplicando por  $(z - z_k)^n$

$$\begin{aligned} (z - z_k)^n f(z) &= c_n + \dots + c_{-1}(z - z_k)^{n-1} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i (z - z_k)^i \\ \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_k} \left[ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_k)^n f(z) \right] &= (n-1)! Res(f, z_k). \end{aligned}$$

Luego hemos encontrado una fórmula alternativa para el residuo

$$Res(f, z_k) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_k} \left[ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_k)^n f(z) \right]. \quad (4.4)$$

**Ejemplo 4.4.1.**

Calcular los residuos de

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)^2}, \quad f(z) = \frac{1}{z^2 \sin(z)}$$

**Solución:**

Para el primer caso, notemos que la función tiene polos simples en  $\pm i$  y uno doble en 0. Ocupemos la fórmula (4.4)

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, i) &= \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{1}{z^2(z+i)(z-i)} \\ &= \frac{1}{i^2(2i)} = \frac{i}{2}. \end{aligned}$$

El caso del polo  $-i$  lo dejamos propuesto. Veamos el polo doble

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} z^2 \frac{1}{z^2(z^2+1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z^2+1)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Encontremos ahora el residuo de  $f(z) = \frac{1}{z^2 \sin(z)}$ . El caso de los polos simples  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  se reduce a un cálculo similar al anterior. Calculemos el polo  $z = 0$  de orden 3, para esto encontremos el coeficiente  $c_{-1}$  de la expansión en serie de Laurent de  $f$ . Dado que  $1/\sin z$  tiene un polo simple en 0, se tiene que

$$\frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{z^2} \left( \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots \right),$$

por lo que  $c_{-1} = a_1$ . Por otro lado

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin z} \sin z &= 1 \\ \left( \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots \right) \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) &= 1. \end{aligned}$$

De aquí se concluye que

$$\begin{aligned} a_{-1} &= 1, \quad a_0 = 0, \quad \frac{a_{-1}}{3!} + a_1 = 0, \\ \text{y por lo tanto} \quad a_1 &= \frac{1}{3!}. \end{aligned}$$

En resumen

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{6}.$$

**Ejercicio 4.4.2.** Para  $n \in \mathbb{N}$  encuentre el residuo de  $(1 - e^{-z})^{-n}$  en 0.

**Teorema 4.4.3.** (Teorema de Cauchy para la derivada)

Sea  $f$  analítica en  $D$  simplemente conexo y sea  $\gamma$  una curva cerrada. Sea  $z \notin \gamma$ , entonces

$$f^{(k)}(z)n(\gamma, z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{(k+1)}}.$$

**Demostración:**

Notando que  $z$  es un polo de orden a lo más  $k+1$  de  $\frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left( \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}, z \right) &= \frac{1}{k!} \lim_{w \rightarrow z} \frac{d^k}{dz^k} (w-z)^{k+1} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} \\ &= \frac{f^{(k)}(z)}{k!}. \end{aligned}$$

y luego

$$n(\gamma, z) \frac{f^{(k)}(z)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} \square$$

**Ejercicio 4.4.3.** Sea  $\gamma$  una curva cerrada y  $\varphi : \gamma \rightarrow \mathbb{C}$  continua. Sea  $D = \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma : n(\gamma, z) = 1\}$ , entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{w-z} dw,$$

es analítica en  $D$ . Encuentre además las derivadas.

**Definición 4.4.4.**

Se dice que una función  $f$  es meromorfa en  $D$ , si  $f$  es analítica en  $D$  salvo en un conjunto de polos aislados.

**Observación 4.4.3.**

El hecho de que los polos sean aislados exige que el conjunto de ellos sea a lo mas numerable.

**Teorema 4.4.4.**

Sea  $D$  simplemente conexo y  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  meromorfa. Consideremos una curva cerrada  $\gamma$  que no contiene a los polos ni a los ceros de  $f$ , entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\mathbb{Z}_{\gamma}(f)} n(\gamma, w) - \sum_{\mathbb{P}_{\gamma}(f)} n(\gamma, u),$$

donde los ceros ( $\mathbb{Z}_{\gamma}(f)$ ) y los polos ( $\mathbb{P}_{\gamma}(f)$ ) se cuentan con multiplicidad.

**Demostración:**

Consideremos  $g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$  que tiene singularidades aisladas en los ceros y en los polos de  $f$ . Sea  $a$  un cero de  $f$  de orden  $k$ , luego en una vecindad de  $a$

$$f(z) = (z - a)h(z) \quad \text{por lo que} \quad f'(z) = k(z - a)^{k-1}h(z) + (z - a)^k h'(z),$$

donde  $h(z)$  cumple que  $h(a) \neq 0$ . Dividiendo

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{k(z - a)^{k-1}h(z)}{(z - a)^k h(z)} + \frac{h'(z)(z - a)^k}{h(z)(z - a)^k} \\ &= k \frac{1}{z - a} + \frac{h'(z)}{h(z)}, \end{aligned}$$

por lo que  $\text{Res}(g(z), a) = k$ . Para un polo  $b$  de orden  $m$  se procede de manera análoga y se tendrá

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{-m(z - b)^{-1-m}\alpha(z)}{(z - b)^{-m}\alpha(z)} + \frac{\alpha'(z)(z - b)^{-m}}{\alpha(z)(z - b)^{-m}} \\ &= -m \frac{1}{z - b} + \frac{\alpha'(z)}{\alpha(z)}, \end{aligned}$$

donde  $\alpha(z)$  es analítica y  $\alpha(b) \neq 0$ . Así  $\text{Res}(g(z), b) = -m$ , lo que concluye el resultado.  $\square$

**Definición 4.4.5.**

Una curva cerrada  $\gamma$  se dice regular si para todo  $z \in \mathbb{C}$

$$n(\gamma, z) = 0 \quad \text{o} \quad n(\gamma, z) = 1.$$

**Corolario 4.4.1.** (Pincipio del Argumento)

Sea  $f$  analítica en  $D$  simplemente conexo y sea  $\gamma$  una curva cerrada regular tal que no contiene los ceros de  $f$ , entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathbb{Z}(f),$$

donde  $\mathbb{Z}(f)$  denota el número de ceros de la función.

**Observación 4.4.4.**

Una interpretación poco rigurosa, pero intuitiva del corolario anterior es la siguiente

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} [\log f(b) - \log f(a)].$$

la cual se conoce como principio del argumento. En forma mas coloquial diríamos que el número de veces que se esta sumando  $2\pi i$  es el número de ceros. Equivalentemente, este hecho resulta

de una transformación

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w} \\ &= n(\Gamma, 0), \end{aligned}$$

donde  $\Gamma$  es la curva  $f(\gamma)$ . Es decir, el número de ceros es el número de vueltas de nuestra nueva curva alrededor de 0.

Veamos más aplicaciones y consecuencias del Teorema 4.4.2.

#### 4.4.1. Función inversa

Nos proponemos en esta subsección encontrar la función inversa (condiciones y fórmulas) de una función analítica  $f$ .

##### Proposición 4.4.3.

Sea  $f$  analítica en una vecindad de  $z_0$  con  $f'(z_0) = 0$ , entonces  $f$  no es inyectiva.

##### Demostración:

Supongamos que  $f^{(k)}(z_0) = 0$  y  $f^{(k+1)}(z_0) \neq 0$  y sea  $w_0 = f(z_0)$ . Sea  $\varepsilon > 0$  tal que

$$f(z) - w_0 \neq 0 \quad \forall z \in \overline{D(z_0, \varepsilon)} \setminus \{z_0\},$$

y consideremos  $\gamma = \partial D(z_0, \varepsilon)$ . Por un lado tenemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(f(z) - w_0)'}{f(z) - w_0} dz = k.$$

Consideremos ahora  $\Gamma = f(\gamma)$ , entonces existe  $\delta > 0$  tal que si  $|w - w_0| < \delta$  entonces  $n(\Gamma, w) = k$ , es decir

$$\begin{aligned} n(\Gamma, w) = k &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t)) - w} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(f(z) - w)'}{f(z) - w} dz \\ &= \mathbb{Z}(f(z) - w). \end{aligned}$$

Para que todos los ceros de  $f(z) - w$  sean simples, basta tomar una vecindad de  $z_0$  suficientemente pequeña tal que  $f'(z) \neq 0$  en  $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ .  $\square$

**Teorema 4.4.5.**

Sea  $f$  analítica e inyectiva en  $D(z_0, \varepsilon)$  y  $\gamma = \partial D(z_0, \varepsilon)$ . Si  $g$  es una función analítica en  $\mathbb{C}$ , entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = g(f^{-1}(w)),$$

donde  $w \in D(w_0, \delta)$  y  $\delta < \text{dist}(w_0, \gamma)$ .

**Demostración**

Sea  $w_0 = f(z_0)$ . Dado que  $f$  es inyectiva se tiene  $f'(z) \neq 0$  en  $D(z_0, \varepsilon)$ , por lo que  $f(z) - w_0 = 0$  tiene como única solución  $z_0$  en  $D(z_0, \varepsilon)$ . Elegimos  $\delta > 0$  tal que si  $|w - w_0| < \delta$  entonces para  $\Gamma = f(\gamma)$  se cumple  $n(\Gamma, w_0) = n(\Gamma, w)$ . Como  $g$  es analítica se tiene

$$\text{Res} \left( g(z) \frac{f'(z)}{f(z) - w_0}, z_0 \right) = g(z_0) \text{Res} \left( \frac{f'(z)}{f(z) - w_0}, z_0 \right) = g(z_0),$$

por lo que

$$\int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = g(z_0).$$

Dado que  $f(z) - w$  solo tiene un cero en  $D(z_0, \varepsilon)$  se cumple que

$$\int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = g(z) = g(f^{-1}(w)),$$

donde  $w \in D(w_0, \delta)$ ,  $\delta < \text{dist}(w_0, \gamma)$ .  $\square$

**Corolario 4.4.2.**

Bajo las mismas hipótesis sobre  $f$  del teorema 4.4.5, se cumple

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} z \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz,$$

donde  $w \in D(w_0, \delta)$ ,  $\delta < \text{dist}(w_0, \gamma)$ .

**Demostración:**

Basta tomar  $g(z) = z$  en el Teorema 4.4.5.

**Teorema 4.4.6.**

La expansión en serie de  $g(f^{-1})$  definida en el teorema 4.4.5 está dada por

$$g(f^{-1}(w)) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{(f(z) - w_0)^{n+1}} dz \right] (w - w_0)^n. \quad (4.5)$$

**Demostración:**

En la demostración seguiremos la misma notación que en el Teorema 4.4.5. Dado que  $|w - w_0| < \delta$  y  $|f(z) - w_0| \geq \delta$  para  $z \in \gamma$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z) - w} &= \frac{f'(z)}{f(z) - w_0 - (w - w_0)} \\ &= \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} \frac{1}{1 - \frac{w - w_0}{f(z) - w_0}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} \left[ \frac{w - w_0}{f(z) - w_0} \right]^n. \end{aligned}$$

Denotando  $M = \max_{z \in \gamma} |f'(z)|$ , vemos que el término general de la serie está acotado por

$$\frac{M}{\delta} \left( \frac{|w - w_0|}{\delta} \right)^n,$$

lo que implica que la serie converge absolutamente. Ocupando el resultado del Teorema 4.4.5 e intercambiando serie con integral, se concluye que

$$g(f^{-1}(w)) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{(f(z) - w_0)^{n+1}} dz \right] (w - w_0)^n. \square$$

**Ejemplo 4.4.2.**

Pruebe que la serie (4.5), puede reescribirse como

$$g(f^{-1}(w)) = g(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} g'(z) \left[ \frac{z - z_0}{f(z) - w_0} \right]^n \right\}_{z=z_0} (w - w_0)^n.$$

**Solución**

Básicamente queremos evaluar

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{(f(z) - w_0)^{n+1}} dz$$

para poder reemplazar el resultado en (4.5).

Siguiendo la demostración del Teorema 4.4.5 se tiene que para  $n = 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{(f(z) - w_0)} dz = g(z_0).$$

Usando integración por partes obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{(f(z) - w_0)^{n+1}} dz &= \frac{-1}{2\pi i n} \int_{\gamma} g(z) d \left\{ \frac{1}{(f(z) - w_0)^n} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i n} \int_{\gamma} \frac{g'(z)}{(f(z) - w_0)^n} dz. \end{aligned}$$

Supongamos que  $g'(z_0) \neq 0$ , entonces es claro que la función

$$\frac{g'(z)}{(f(z) - w_0)^n}$$

tiene un polo en  $z_0$  de orden  $n$ . Ocupando la fórmula (4.4), se tiene

$$\operatorname{Res} \left( \frac{g'(z)}{(f(z) - w_0)^n}, z_0 \right) = \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} g'(z_0) \frac{(z - z_0)^n}{(f(z) - w_0)^n} \right\}_{z=z_0}$$

que sigue siendo válida si  $g'(z_0) = 0$ . Luego ocupando este resultado en la fórmula integral, se concluye que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{(f(z) - w_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} g'(z_0) \frac{(z - z_0)^n}{(f(z) - w_0)^n} \right\}_{z=z_0}. \square$$

#### Ejercicio 4.4.4.

Reescribir los teoremas y corolarios anteriores para  $g(z) = z$ .

### 4.4.2. Teorema de Rouché y consecuencias

#### Teorema 4.4.7. (Teorema de Rouché)

Sean  $f, g$  funciones analíticas en  $D$  simplemente conexo. Consideremos una curva regular  $\gamma$  que no contiene ceros ni de  $f$  ni de  $g$ . Supongamos además que

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \forall z \in \gamma.$$

Entonces se tiene que

$$\mathbb{Z}_{\gamma}(f + g) = \mathbb{Z}_{\gamma}(f),$$

donde los ceros han sido contados con multiplicidad.

#### Demostración

Primero, recordemos que

$$\mathbb{Z}(f + g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(f(z) + g(z))'}{f(z) + g(z)} dz \quad \text{y} \quad \mathbb{Z}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Usando que

$$f(z) + g(z) = f(z) \left[ 1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right],$$

obtenemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(f(z) + g(z))'}{f(z) + g(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\left[ \frac{g(z)}{f(z)} \right]'}{\left[ 1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right]} dz.$$

Notando que  $\frac{g(\gamma)}{f(\gamma)} \in D(0, 1)$ , por lo que

$$n\left(\frac{g(\gamma)}{f(\gamma)}, -1\right) = 0,$$

y además

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\left[\frac{g(z)}{f(z)}\right]'}{\left[1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right]} dz = n\left(\frac{g(\gamma)}{f(\gamma)}, -1\right),$$

se concluye

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(f(z) + g(z))'}{f(z) + g(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \square$$

#### Ejercicio 4.4.5.

Demuestre el Teorema Fundamental del Álgebra usando el Teorema de Rouché.

#### Ejemplo 4.4.3.

Sea  $f : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  analítica, tal que

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad |f'(z)| \leq M \quad \forall z \in D(0, 1).$$

- (i) Demuestre que  $|f'(z) - 1| \leq (M + 1)|z|$  para todo  $z \in D(0, 1)$ . *Hint: Use el Lema de Schwarz.*
- (ii) Pruebe que todo  $w \in D\left(0, \frac{1}{2(M+1)}\right)$  tiene una única preimágen en  $D\left(0, \frac{1}{M+1}\right)$ . *Hint: Use el Teorema de Rouché, la parte anterior y observe que  $f(z) - w + w - z = \int_0^z (f'(\zeta) - 1)d\zeta$ .*

#### Solución:

(i) Propuesto

(ii) Si  $w \in D\left(0, \frac{1}{2(M+1)}\right)$  y  $z \in \partial D\left(0, \frac{1}{M+1}\right)$  entonces

$$\begin{aligned} |w - z| &\geq |z| - |w| \\ &= \frac{1}{M+1} - |w| \\ &> \frac{1}{2(M+1)}, \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}
 |f(z) - w + w - z| &= \left| \int_0^z (f(\zeta) - 1) d\zeta \right| \\
 &\leq \int_0^z |f(\zeta) - 1| d\zeta \\
 &\leq (M + 1) \int_0^z |\zeta| d\zeta \\
 &= \frac{(M + 1) |z|^2}{2} = \frac{1}{2(M + 1)}.
 \end{aligned}$$

Entonces, el Teorema de Rouché nos asegura que el número de ceros de  $z - w$  es el mismo que el de  $f(z) - w + w - z + (z - w)$  en  $D(0, \frac{1}{M+1})$ , es decir

$$\mathbb{Z}(f(z) - w) = \mathbb{Z}(f(z) - w + w - z + (z - w)) = \mathbb{Z}(z - w) = 1,$$

es decir la ecuación  $f(z) = w$  tiene exactamente una solución en ese disco.

#### Ejemplo 4.4.4.

Sea  $P(z) = z^5 + z$ .

(i) Encuentre explícitamente una constante  $\delta > 0$  tal que  $P(z) = w$  tenga una única solución  $z$  con  $|z| < 1/2$  si  $|w| < \delta$ .

(ii) Para  $|w| < \delta$  sea  $R(w)$  la única solución de  $P(z) = w$  con  $|z| < 1/2$ . Pruebe que

$$R(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0, 1/2)} \frac{\zeta P'(\zeta)}{P(\zeta) - w} d\zeta.$$

(iii) Encuentre el primer término distinto de cero de la expansión en serie de  $R(w)$  en torno a 0.

#### Solución:

(i) Las soluciones de  $P(z) = w$  son los ceros de  $P(z) - w = z^5 + z - w$ , por lo que aplicaremos Rouché. Tomando  $f(z) = z$  y  $g(z) = z^5 - w$ , tenemos que

$$|f(z)| = |z| = \frac{1}{2} \quad \text{en } D\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Impongamos para  $g$  la condición necesaria para aplicar Rouché, es decir

$$|g(z)| = |z^5 - w| \leq |z^5| + |w| < \frac{1}{2}$$

y dado necesitamos  $|z| = 1/2$ , luego

$$|w| < \frac{1}{2} - \frac{1}{2^5} = \frac{15}{32},$$

por lo que para  $\delta = 15/32$  tenemos que existe una única solución a nuestra ecuación.

- (ii) Propuesto (directo del Teorema de la Función Inversa).
- (iii) Dado que  $R(w)$  es la inversa del polinomio  $P(z)$ , luego encontrar su serie es recordar la fórmula (4.5), es decir

$$R(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,1/2)} \frac{\zeta P'(\zeta)}{P(\zeta)^{n+1}} d\zeta \right] w^n,$$

donde hemos tomado  $w_0 = 0$ . Encontramos el primer término distinto de cero. Es evidente que  $R(0) = 0$ , veamos que pasa para  $n = 1$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,1/2)} \frac{\zeta P'(\zeta)}{P(\zeta)^2} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,1/2)} \frac{\zeta}{\zeta^2} \cdot \frac{5\zeta^4 + 1}{(\zeta^4 + 1)^2} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,1/2)} \frac{5\zeta^4 + 1}{(\zeta^4 + 1)^2} \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= 1, \end{aligned}$$

es decir  $a_1 = 1$ , donde el último resultado se saca al calcular el residuo de la integral.

#### Observación 4.4.5.

La parte (iii) del ejemplo anterior se puede hacer directamente ocupando derivada implícita como sigue

$$\begin{aligned} z^5(w) + z(w) &= w \\ 5z^4(w)z'(w) + z'(w) &= 1 \quad \text{y evaluando en cero} \\ z'(w) &= 1, \end{aligned}$$

es decir, el primer coeficiente de la serie distinto de cero es  $a_1 = 1$ .

#### Ejercicio 4.4.6.

Encuentre el número de raíces de la siguiente ecuación

$$z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$$

en  $|z| < 1$ .

**Teorema 4.4.8.**

Sea  $D$  una región y  $f_n : D \rightarrow D$  analítica para todo  $n$  con  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en compactos de  $D$ . Entonces se tiene  $f'_n \rightarrow f'$  uniformemente en compactos de  $D$ .

**Demostración :**

Demostraremos que para cada  $z_0 \in D$  existe  $r > 0$  tal que  $f'_n \rightarrow f'$  uniformemente en  $D(z_0, r)$ . Sea  $r > 0$  tal que  $D(z_0, r) \subset D$ , debido a la fórmula de Cauchy

$$f'(z) - f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(w) - f_n(w)}{(w - z_0)^2} dw.$$

Para  $\varepsilon > 0$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f(w) - f_n(w) \leq \varepsilon$  en  $\partial D(z_0, r)$ , por lo que

$$|f'(z) - f'_n(z)| \leq \int_{\partial D(z_0, r)} \varepsilon \left| \frac{1}{(w - z_0)^2} \right| dw,$$

y si  $z \in D(z_0, r/2)$  obtenemos

$$|f'(z) - f'_n(z)| \leq \left( \frac{4\varepsilon}{r^2} \right) (2\pi) \left( \frac{r}{2} \right) = \frac{4\pi\varepsilon}{r},$$

lo cual prueba que  $f'_n \rightarrow f'$  uniformemente en  $D(z_0, r/2)$ . El resultado general se tiene usando que todo compacto admite recubrimiento finito.  $\square$

**Teorema 4.4.9. (Teorema de Hurwitz)**

Sean  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  funciones analíticas en una región  $D$  y  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en compactos de  $D$ . Si  $f_n(z) \neq 0$  para todo  $z \in D$  entonces  $f(z) \neq 0 \forall z \in D$  o  $f \equiv 0$ .

**Demostración:**

Razonemos por contradicción. Supongamos que existe  $z_0$  tal que  $f(z_0) = 0$  y  $f \neq 0$ . Eligiendo  $\varepsilon > 0$  pequeño obtenemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, \varepsilon)} \frac{f'(w)}{f(w)} dw = k,$$

donde  $k \neq 0$  es la multiplicidad de  $z_0$ . Pero por el teorema anterior

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, \varepsilon)} \frac{f'_n(w)}{f_n(w)} dw \rightarrow \int_{\partial D(z_0, \varepsilon)} \frac{f'(w)}{f(w)} dw,$$

y como  $\int_{\partial D(z_0, \varepsilon)} \frac{f'_n(w)}{f_n(w)} dw = 0$  para todo  $n$  se concluye que  $\int_{\partial D(z_0, \varepsilon)} \frac{f'(w)}{f(w)} dw = 0$ , lo cual es una contradicción.  $\square$

**Corolario 4.4.3.**

Sea  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una secuencia de funciones analíticas tal que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en compactos de una región  $D$ . Si  $f_n$  es inyectiva para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f$  es inyectiva o  $f$  es constante.

**Demostración:**

Procederemos por contradicción. Supongamos que existen  $z_1 \neq z_2$  tal que  $f(z_1) = f(z_2) = \alpha$  y  $f$  no constante. Sea  $\varepsilon > 0$  tal que la ecuación  $f(z) - \alpha = 0$  tiene como única solución  $z_1$  en  $D(z_1, \varepsilon)$  y  $z_2$  en  $D(z_2, \varepsilon)$ .

Por el Teorema de Hurwitz existen  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $f_n(z_n) = \alpha$  y  $f_n(w_n) = \alpha$ , con  $z_n \in D(z_1, \varepsilon)$  y  $w_n \in D(z_2, \varepsilon)$ . Esto último contradice el hecho de que  $f_n$  sea inyectiva.  $\square$

**Ejercicio 4.4.7.**

Sea

$$g_n = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

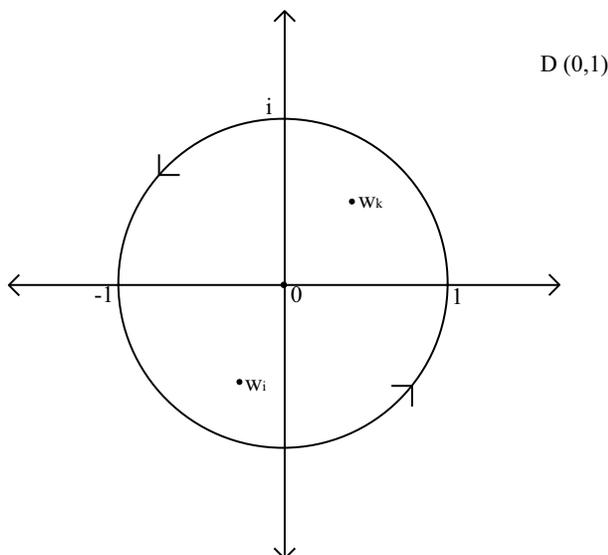
Demuestre que para un  $n$  suficientemente grande  $g_n$  tiene un cero en  $D(\pi, 1)$ .

**4.4.3. Aplicación del Teorema de los residuos al cálculo de integrales reales**

1. Sea  $R$  una función racional en las variables  $x, y$ . Para calcular

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta,$$

la escribiremos como una integral compleja. Consideremos  $z = e^{i\theta}$  en  $\partial D(0, 1)$



así

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left[ z + \frac{1}{z} \right], \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} \left[ z - \frac{1}{z} \right] \quad \text{y} \quad d\theta = \frac{dz}{iz},$$

de donde

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} R\left(\frac{1}{2}\left[z + \frac{1}{z}\right], \frac{1}{2i}\left[z - \frac{1}{z}\right]\right) \frac{dz}{iz},$$

y por el Teorema de los Residuos

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = 2\pi i \sum_{w_i} \operatorname{Res} \left\{ R\left(\frac{1}{2}\left[z + \frac{1}{z}\right], \frac{1}{2i}\left[z - \frac{1}{z}\right]\right) \frac{1}{iz}, w_i \right\}, \quad (4.6)$$

donde  $w_i$  son los polos de la función racional.

#### Ejemplo 4.4.5.

Calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta},$$

donde  $a > 1$ .

#### Solución:

Escribiendo la integral en términos de  $z$  se tiene y usando (4.6) tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} &= \int_{|z|=1} \frac{-2i}{z^2 + 2az + 1} dz \\ &= -2i \cdot 2\pi i \sum_{w_i} \operatorname{Res} \left( \frac{1}{z^2 + 2az + 1}, w_i \right), \end{aligned}$$

donde  $w_i$  son polos en  $D(0, 1)$ . Es fácil ver que el único polo de  $(z^2 + 2az + 1)^{-1}$  en  $D(0, 1)$  es  $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$  el cual resulta ser un polo simple. Un rápido cálculo nos indica que

$$\operatorname{Res} \left( \frac{1}{z^2 + 2az + 1}, z_1 \right) = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}},$$

con lo que concluimos que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

#### Ejercicio 4.4.8.

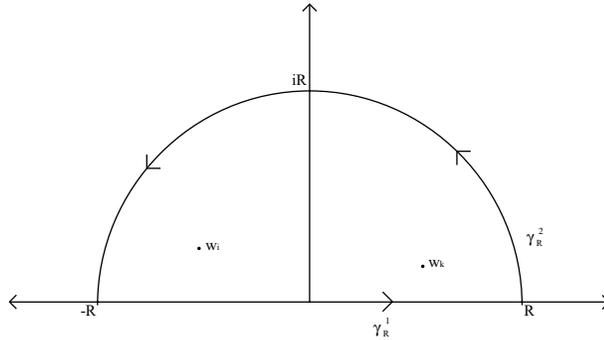
Calcule las integrales

- $\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{a + b \cos \theta} d\theta$  si  $0 < b < a$ .
- $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \sin \theta}$  si  $a > 0, b > 0$ .
- $\int_0^{\pi/2} \frac{a}{a^2 + \sin^2 \theta} d\theta$ .

2. Sean  $P, Q$  dos polinomios tal que  $gr(P) + 2 \leq gr(Q)$  y  $P(z)/Q(z)$  no tiene polos en el eje real. Queremos encontrar una fórmula para la siguiente integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

Para eso consideremos el camino de la figura.



Como  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  es convergente, lo anterior es igual a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

Ahora bien, sabemos que

$$\int_{\gamma_R^1} \frac{P(z)}{Q(z)} dz + \int_{\gamma_R^2} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{w_i} \text{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)}, w_i \right),$$

donde  $w_i$  son los polos en el semiplano superior de la función racional. Sea  $R > 0$  tal que todos los polos de  $f(z)$  en  $Im(z) > 0$  pertenecen a  $D(0, R/2) \cap Im(z) > 0$ , luego

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R^2} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{P(Re^{i\theta})}{Q(Re^{i\theta})} iRe^{i\theta} d\theta \right| \\ &= \int_0^\pi \left| \frac{P(Re^{i\theta})}{Q(Re^{i\theta})} \right| R d\theta \\ &\leq \int_0^\pi \frac{K}{R^2} R d\theta \\ &= \frac{K\pi}{R} \rightarrow 0 \text{ cuando } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Además

$$\int_{\gamma_R^1} \frac{Q(z)}{P(z)} dz \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(x)}{P(x)} dx,$$

lo cual nos permite concluir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(x)}{P(x)} dx = 2\pi i \sum_{w_i} \operatorname{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)}, w_i \right), \quad (4.7)$$

donde  $w_i$  son los polos en el semiplano superior ( $\{Im(z) > 0\}$ ).

**Ejemplo 4.4.6.**

*Calcule*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx.$$

**Solución:**

Sea  $P(z) = z^2 - z + 2$  y sea  $Q(z) = z^4 + 10z^2 - 9$ . Notemos que los ceros de  $P(z)$  no coinciden con los ceros de  $Q(z)$ , luego, los polos de la función  $\frac{P(z)}{Q(z)}$  son los ceros de  $Q(z)$ . Descomponiendo  $Q(z)$

$$\begin{aligned} Q(z) &= (z^2 + 9)(z^2 + 1) \\ &= (z + 3i)(z - 3i)(z + i)(z - i), \end{aligned}$$

luego los polos buscados son  $z_1 = 3i$ ,  $z_2 = i$ . Un pequeño cálculo nos indica que

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)}, z_1 \right) &= \frac{-7i + 3}{48}, \\ \operatorname{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)}, z_2 \right) &= \frac{1 - i}{16}, \end{aligned}$$

por lo que usando (4.7), se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx &= 2\pi \left[ \frac{-7i + 3}{48} + \frac{1 - i}{16} \right] \\ &= \frac{5\pi}{12} \end{aligned}$$

**Ejercicio 4.4.9.**

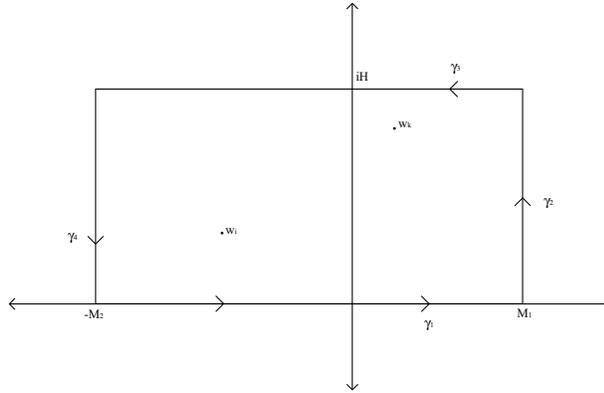
*Calcule la siguiente integral real*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 2x + 2)}$$

3. Sean  $P$ ,  $Q$  dos polinimios tal que  $gr(P) + 1 \leq gr(Q)$  y  $P(z)/Q(z)$  no tiene polos en  $Im(z) = 0$ . Buscamos una fórmula explícita para la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx,$$

la cual probaremos que está bien definida. Consideremos el camino de la figura, la función compleja  $e^{iz}P(z)/Q(z)$  y denotemos por  $\Gamma$  a  $\bigcup_{i=0}^4 \gamma_i$ .



Es importante notar el hecho de que el camino anterior no fue tomado simetrico, pues a priori no sabemos si la integral converge o no, por lo que se deben escoger puntos arbitrarios y tomar el limite por separado. Tomemos  $M_1, M_2, H$  suficientemente grandes para que todos los polos de la función en  $Im(z) > 0$  queden encerrados por  $\Gamma$ . De esta forma el teorema de los residuos nos entrega

$$\sum_{i=0}^4 \int_{\gamma_i} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz = 2\pi i \sum_{w_j} Res \left( \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}, w_j \right), \quad (4.8)$$

donde  $w_j$  representa un polo de la función. Analicemos el comportamiento de cada integral

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz \right| &= \left| \int_0^H \frac{P(M_1 + iy)}{Q(M_1 + iy)} e^{i(M_1 + iy)} i dy \right| \\ &\leq \int_0^H \frac{c}{M_1} e^{-y} dy \\ &= \frac{c}{M_1} (1 - e^{-H}), \end{aligned}$$

donde  $c$  es una constante. Análogamente para  $\gamma_4$  se tiene que

$$\left| \int_{\gamma_4} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz \right| \leq \frac{c'}{M_2} (1 - e^{-H}),$$

Para  $\gamma_3$  se tiene

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_3} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz \right| &= \left| - \int_{-M_2}^{M_1} \frac{P(x + iH)}{Q(x + iH)} e^{x+iH} dx \right| \\ &\leq \int_{-M_2}^{M_1} \frac{c''}{H} e^{-H} dx \\ &= (M_1 + M_2) \frac{e^{-H} c''}{H}. \end{aligned}$$

Además

$$\int_{\gamma_1} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz = \int_{-M_2}^{M_1} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx,$$

de esta forma, tomando  $H \rightarrow \infty$  se cumple que cada cota encontrada para las integrales sobre  $\gamma_i, i = 2, 3, 4$  tiende a cero y tomando ahora  $M_1, M_2 \rightarrow \infty$  se tiene que la expresión (4.8) resulta ser

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{w_j} \operatorname{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}, w_j \right). \quad (4.9)$$

#### Ejemplo 4.4.7.

Pruebe que

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} \quad \forall a > 0$$

#### Solución:

Dado que el integrando es par, podemos ocupar (4.9), para lo cual debemos calcular los polos y residuos de  $ze^{iz}/(z^2 + a^2)$ . Es fácil ver que el polo a considerar es  $ia$  y su residuo es

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left( \frac{ze^{iz}}{z^2 + a^2}, ia \right) &= \lim_{z \rightarrow ia} (z - ia) \frac{ze^{iz}}{z^2 + a^2} \\ &= \frac{aie^{iai}}{2ai} = \frac{e^{-a}}{2}. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 + a^2} dx = 2\pi i \frac{e^{-a}}{2},$$

tomando parte imaginaria, se concluye que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 + a^2} dx = 2\pi \frac{e^{-a}}{2}$$

$$\text{por lo que } \int_0^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 + a^2} dx = \pi \frac{e^{-a}}{2}.$$

#### Ejercicio 4.4.10.

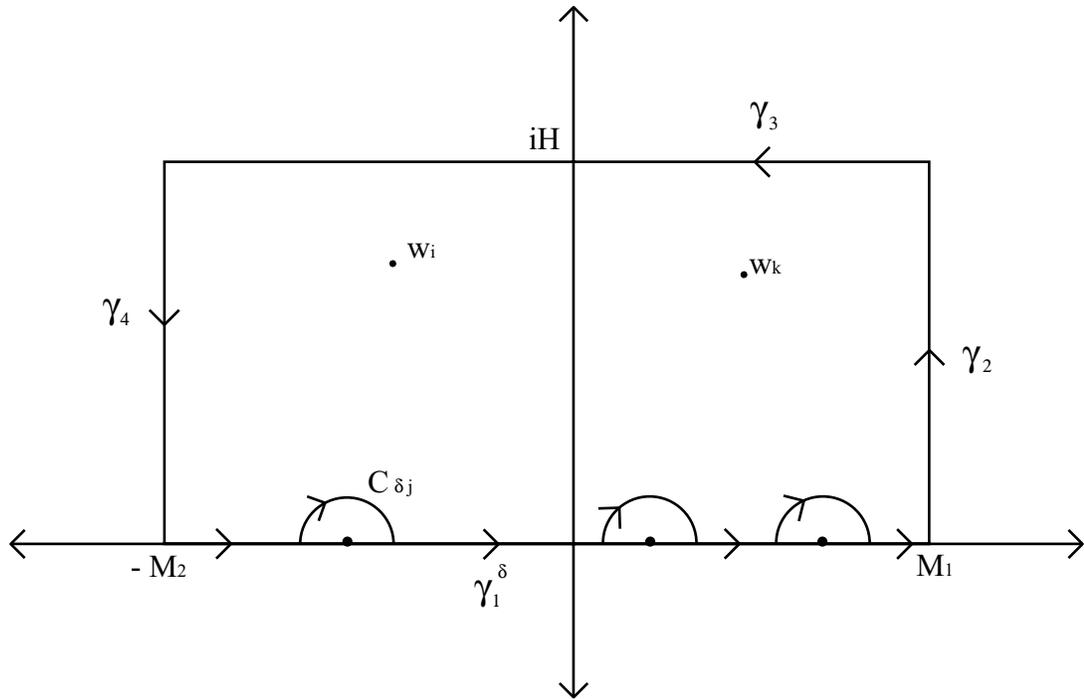
Calcule las siguientes integrales reales

- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2 + \pi^2)^2} dx.$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{a^2 + x^2} dx.$
- $\int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos^2(\pi x)}{(x^2 + 1)^2} dx.$

4. Sean  $P, Q$  dos polinomios tal que  $gr(P) + 1 \leq gr(Q)$  y supongamos ahora que  $P(z)/Q(z)$  tiene polos  $z_1, \dots, z_k$  simples en  $Im(z) = 0$ . Queremos encontrar una fórmula para el valor principal de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx.$$

Para eso consideremos el mismo contorno anterior, salvo que entorno a cada polo real consideramos semicircunferencias  $C_{\delta_j}$  del estilo  $\delta_j e^{-i\theta} + z_j, \theta \in [0, \pi]$ .



Analicemos el caso en el que hay solamente un polo en el eje real (la generalización queda clara después de este análisis). Las curvas  $\gamma_i, i = 2, 3, 4$ , tienen el mismo desarrollo anterior (su convergencia a cero no se ve alterada), con lo cual sólo debemos estudiar el comportamiento siguiente

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{-\delta+z_1} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx + \int_{\delta+z_1}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx + \int_{C_\delta} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz, \quad (4.10)$$

en donde se tomó el valor principal para que las integrales converjan. Consideremos  $\delta$  suficientemente pequeño,  $H, M_1, M_2$  suficientemente grandes para que todos los polos de  $Im(z) > 0$  estén dentro del camino considerado. Sabemos que cerca de  $z_1$  se tiene

$$e^{iz} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\alpha}{z - z_1} + L(z),$$

donde  $L(z)$  es una función analítica en una vecindad de  $z_1$  y  $\alpha$  el coeficiente  $-1$  de la expansión en series de Laurent. Teniendo en cuenta el teorema de Cauchy, se tiene que

$$\int_{C_\delta} L(z) dz = 0,$$

por lo que

$$\int_{C_\delta} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz = \int_{C_\delta} \frac{\alpha}{z - z_1} dz.$$

Escojamos  $\log(z - z_1)$  con su argumento en  $(-\pi/2, 3\pi/2)$ , luego

$$\begin{aligned} \int_{C_\delta} \frac{\alpha}{z - z_1} dz &= \log(z_1 + \delta - z_1) - \log(z_1 - \delta - z_1) \\ &= \log(\delta) - \log(-\delta) \\ &= -\pi i \alpha. \end{aligned}$$

De esta forma, igualando (4.10) a sus residuos y luego tomando limite cuando  $\delta$  se va a cero, se concluye que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{w_j} \operatorname{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}, w_j \right) + \pi i \alpha.$$

donde  $w_j$  representa un polo cualquiera en  $\operatorname{Im}(z) > 0$ . Es fácil probar que (propuesto) la generalización viene dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{w_j} \operatorname{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}, w_j \right) + \pi i \sum_{z_j} \operatorname{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}, z_j \right), \quad (4.11)$$

donde  $w_j$  representa un polo cualquiera en  $\operatorname{Im}(z) > 0$  y  $z_j$  un polo simple en  $\operatorname{Im}(z) = 0$ .

#### Observación 4.4.6.

*El hecho de que los polos sean simples en  $\operatorname{Im}(z) = 0$  es fundamental, si no*

$$\begin{aligned} \int_{C_\delta} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz &= \int_{C_\delta} \left[ \frac{\alpha_k}{(z - z_1)^k} + \dots + \frac{\alpha_{-1}}{z - z_1} + L(z) \right] dz \\ &= \frac{\alpha_k}{1 - k} \left\{ (z - z_1)^{1-k} \right\}_{z_1 - \delta}^{z_1 + \delta} + \dots + \alpha_1 \left\{ \log(z - z_1) \right\}_{z_1 - \delta}^{z_1 + \delta} + o(\delta), \end{aligned}$$

*lo cual puede valer cero o infinito, dependiendo del orden del polo.*

#### Ejemplo 4.4.8.

*Calcule*

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

**Solución:**

Ocupemos (4.11), así

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx &= \pi i \operatorname{Res} \left( \frac{e^{iz}}{z}, 0 \right) \\ &= \pi i,\end{aligned}$$

luego tomando parte imaginaria

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \pi \\ \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

**Ejercicio 4.4.11.**

Calcule

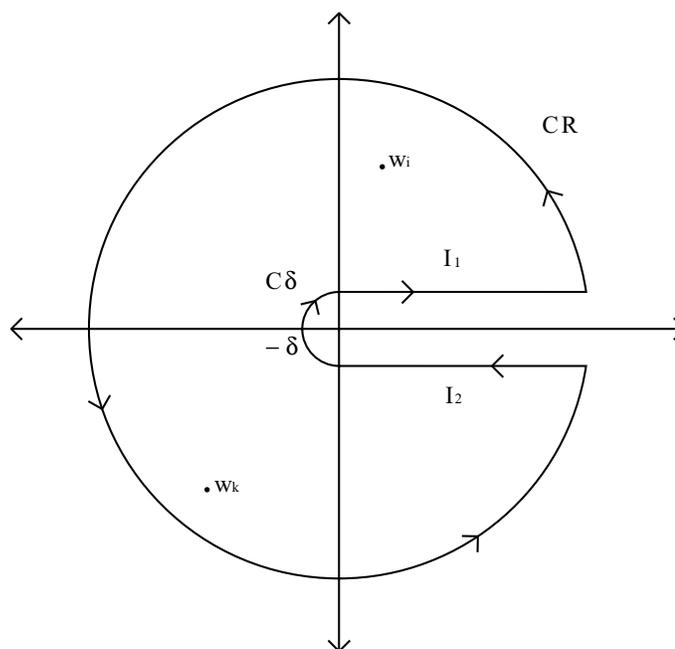
a)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{a^2-x^2} dx.$

b)  $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$

5. Sean  $P, Q$  dos polinomios tal que  $gr(P) + 2 \leq gr(Q)$  y  $P(z)/Q(z)$  no tiene polos en  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im}(z) = 0, \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$ . Nos interesa calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

para lo cual consideramos la función de variable compleja  $\log(z)P(z)/Q(z)$ , donde el argumento está tomado en  $(0, 2\pi)$  y consideramos el camino de la figura.



Tomemos  $R$  suficientemente grande y  $\delta$  pequeño tal que todos los polos de  $\log(z)P(z)/Q(z)$  en  $\Omega$  estén encerrados por la curva. Calculemos cada integral

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \log z dz \right| &= \left| \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \frac{P(Re^{i\theta})}{Q(re^{i\theta})} \log(Re^{i\theta}) Ri\theta d\theta \right| \\ &\leq \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \frac{c}{R^2} |\log(R) + i\theta| R d\theta \\ &\leq \frac{2\pi c}{R} [2\pi \log(R) + 4\pi^2], \end{aligned}$$

expresión que tiende a cero cuando  $R$  tiende a infinito. Un desarrollo similar nos llevara a concluir que

$$\left| \int_{C_{\delta}} \frac{P(z)}{Q(z)} \log z dz \right| \leq c_2 [2\pi \log(\delta) + 4\pi^2] \delta,$$

la cual tiende a cero cuando  $\delta$  tiende a cero. Analicemos  $I_1$  e  $I_2$ ,

$$\int_{I_1} \frac{P(z)}{Q(z)} \log z dz = \int_0^R \frac{P(i\delta + x)}{Q(i\delta + x)} \log(i\delta + x) dx,$$

de esta forma si  $\delta \rightarrow 0$

$$\int_0^R \frac{P(i\delta + x)}{Q(i\delta + x)} \log(i\delta + x) dx \rightarrow \int_0^R \frac{P(x)}{Q(x)} \log(x) dx.$$

Para el caso de  $I_2$  hay que notar que hemos dado aproximadamente una vuelta completa, así

$$\int_{I_2} \frac{P(z)}{Q(z)} \log z dz = - \int_0^R \frac{P(i\delta + x)}{Q(i\delta + x)} [\log(i\delta + x) + 2\pi i + o(\delta)] dx,$$

y tomando  $\delta \rightarrow 0$  se tendrá

$$\int_{I_2} \frac{P(z)}{Q(z)} \log z dz \rightarrow - \int_0^R \frac{P(x)}{Q(x)} [\log(x) + 2\pi i] dx.$$

Finalmente, invocando el Teorema de los Residuos, podemos concluir que

$$\int_0^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = - \sum_{w_j} \text{Res} \left( \frac{P(z)}{Q(z)} \log z, w_j \right), \quad (4.12)$$

donde  $w_j$  es un polo cualquiera de  $\log(z)P(z)/Q(z)$  en  $\Omega$ .

#### Observación 4.4.7.

Notemos que para calcular integrales de la forma

$$\int_a^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

basta utilizar la función  $\log(z-a)P(z)/Q(z)$  y trasladar el contorno anterior en  $a$ .

**Ejemplo 4.4.9.***Calcular*

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$

**Solución:**

Para ocupar (4.12) calculemos los residuos de  $\log(z) \frac{1}{1+z^3}$

$$\operatorname{Res} \left( \frac{\log z}{1+z^3}, e^{i\pi/3} \right) = -\frac{i\pi}{9} \left( \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$\operatorname{Res} \left( \frac{\log z}{1+z^3}, e^{i\pi} \right) = \frac{\pi i}{3},$$

$$\operatorname{Res} \left( \frac{\log z}{1+z^3}, e^{i5\pi/3} \right) = -\frac{5\pi i}{9} \left( \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

con lo que concluimos que

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2}{9}\pi\sqrt{3}.$$

**Ejercicio 4.4.12.***Calcule*

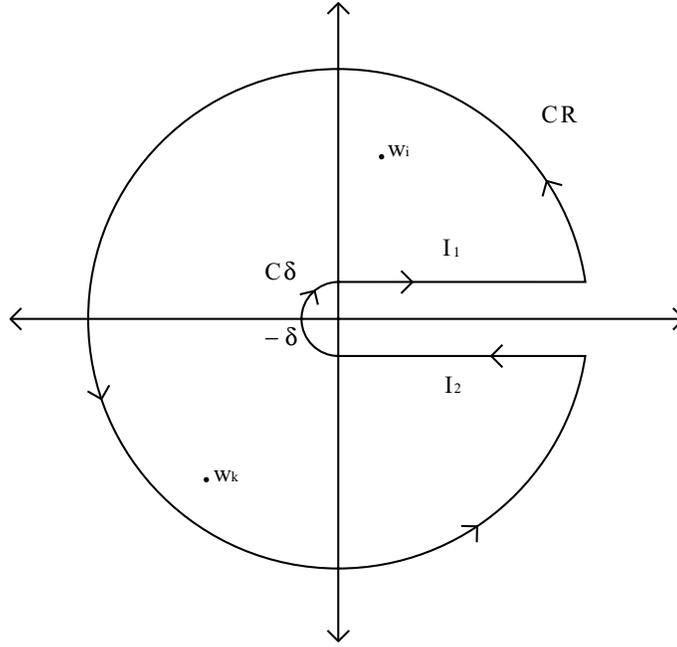
a)  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+8},$

b)  $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+4)^2(x^2+x+9)}.$

6. Sea  $P$  un polinomio tal que satisface  $P(0) \neq 0$  y  $gr(P) \geq 1$ . Supongamos además que  $1/P(z)$  no tiene polos en la recta real positiva. Sea  $0 < \alpha < 1$ , queremos calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{P(x)} dx.$$

Para esto consideremos la función compleja  $z^{\alpha-1}/P(z)$  donde hemos escogido el argumento en  $(0, 2\pi)$ . Consideremos el mismo camino anterior (y misma notación), con  $R$  suficientemente grande y  $\delta$  lo bastante pequeño tal que todos los polos de  $1/P(z)$  están en  $\Omega = \{z \in \mathbb{C}/\operatorname{Im}(z) = 0, \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$ .



Notemos que

$$z^{\alpha-1} = |z|^{\alpha-1} e^{i(\alpha-1)\arg(z)},$$

desarrollando la integral

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_\delta} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)} dz \right| &= \left| \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \frac{\delta^{\alpha-1} e^{i(\alpha-1)\arg(z)} i\delta e^{i\theta} d\theta}{P(\delta e^{i\theta})} \right| \\ &\leq \frac{2\delta^\alpha \pi}{|P(0)|} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando  $\delta \rightarrow 0$ , pues  $\alpha$  es positivo. Análogamente es fácil ver que para  $C_R$  se tiene la siguiente cota

$$\left| \int_{C_R} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)} dz \right| \leq 2\pi k R^{\alpha-1} \rightarrow 0 \text{ cuando } R \rightarrow \infty$$

Procediendo ahora con  $I_1, I_2$  de manera idéntica a la hecha para encontrar (4.12) se tiene que cuando  $\delta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \int_{I_1} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)} dz &\rightarrow \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{P(x)} dx \\ \int_{I_2} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)} dz &\rightarrow - \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{P(x)} e^{(\alpha-1)2\pi i} dx, \end{aligned}$$

Finalmente

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{P(x)} dx - \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{P(x)} e^{(\alpha-1)2\pi i} dx = 2\pi i \sum_{w_j} \operatorname{Res} \left( \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}, w_j \right),$$

donde  $w_j$  representa un polo de  $z^{\alpha-1}/P(z)$  en  $\Omega$ . Reordenando se obtiene

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{P(x)} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i(\alpha-1)}} \sum_{w_j} \operatorname{Res} \left( \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}, w_j \right). \quad (4.13)$$

**Ejemplo 4.4.10.**

Calcule

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx.$$

**Solución:**

El polo de la función viene dado por  $w = -1 = e^{\pi i}$  y su residuo es

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left( \frac{z^{p-1}}{1+z}, w \right) &= \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{z^{p-1}}{1+z} \\ &= e^{(p-1)\pi i}. \end{aligned}$$

Así por lo anterior

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx &= \frac{2\pi i e^{(p-1)\pi i}}{1 - e^{2\pi i(p-1)}} \\ &= \frac{2\pi i}{e^{p\pi i} - e^{-p\pi i}} = \frac{\pi}{\sin p\pi}. \end{aligned}$$

**Ejercicio 4.4.13.**

Verifique que para  $0 < p < 1$  y  $b > 0$  se cumple que

- a)  $\int_0^\infty \frac{x^p dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2 \cos(p\pi/2)}$ .
- b)  $\int_0^\infty \frac{dx}{x^p(x+b)} = \frac{\pi}{b^p \sin(p\pi)}$ .
- c)  $\int_0^\infty \frac{dx}{x^p(x+b)^2} = \frac{\pi}{b^{p+1} \sin(p\pi)}$ .

#### 4.4.4. Aplicación al cálculo de series

1. Sea  $f$  una función meromorfa tal que

$$|f(z)| \leq \frac{a}{|z|^2} \quad \forall |z| \geq R,$$

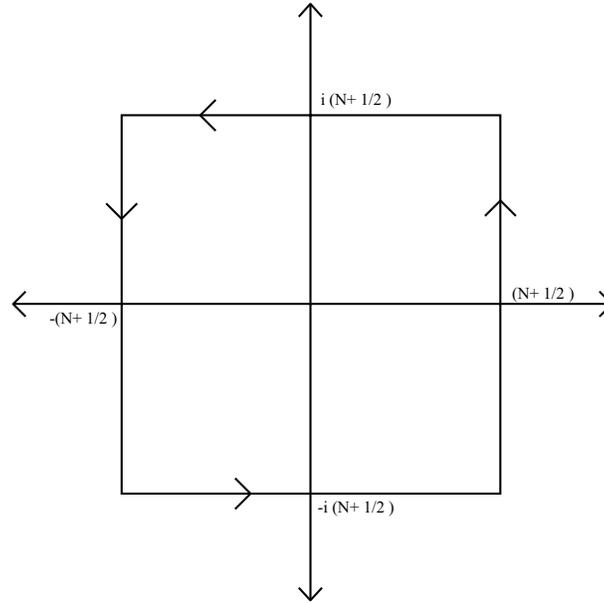
y no tiene polos en  $\mathbb{Z}$ . Deseamos calcular la siguiente serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n).$$

Para esto, consideremos  $g(z) = \pi f(z) \cot(\pi z)$  y notemos que sus polos son los polos de  $f$  y los de  $\cot(\pi z)$ . El residuo de  $g$  en  $z = n \in \mathbb{Z}$  viene dado por

$$\begin{aligned} \text{Res}(g(z), n) &= \lim_{z \rightarrow n} (z - n) \frac{\pi f(z) \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow n} f(z) \frac{\cos(\pi z)}{\cos(\pi n)} = f(n). \end{aligned}$$

Consideremos el camino cuadrado  $\gamma$  de vértices  $([N + 1/2] + i[N + 1/2])$ ,  $(-[N + 1/2] + i[N + 1/2])$ ,  $(-[N + 1/2] - i[N + 1/2])$ ,  $([N + 1/2] - i[N + 1/2])$ , orientado en sentido antihorario.



Llamemos  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ ,  $L_4$  a las rectas que conforman el cuadrado anterior. Por el teorema de los residuos sabemos que

$$\int_{\gamma} g(z) dz = 2\pi i \left[ \sum_{j=-N}^N f(n) + \sum_{w_j} \text{Res}(g(z), w_j) \right], \quad (4.14)$$

donde  $w_j$  representa un polo de  $f$ . Nuestra intención es hacer tender  $N$  a infinito, para eso miremos el comportamiento de la integral. En  $L_1$ :

$$\begin{aligned} \cot \pi(N + 1/2 + iy) &= i \frac{e^{i\pi(N+1/2+iy)} + e^{-i\pi(N+1/2+iy)}}{e^{i\pi(N+1/2+iy)} - e^{-i\pi(N+1/2+iy)}} \\ &= i \frac{1 + e^{-2\pi i(N+1/2+iy)}}{1 - e^{-2\pi i(N+1/2+iy)}}. \end{aligned}$$

Tomando modulo

$$|\cot \pi(N + 1/2 + iy)| \leq \frac{e^{2\pi y} + 1}{e^{2\pi y} - 1} \leq K$$

con  $K$  una constante. Además como la cotangente es impar se tiene que también es acotada en  $L_3$ : así

$$\left| \int_{L_1, L_3} \pi \cot(\pi z) f(z) dz \right| \leq \frac{KA}{N^2} (2N + 1). \quad (4.15)$$

Trabajemos ahora en  $L_2$ :

$$\begin{aligned} \cot \pi(i(N + 1/2) - x) &= i \frac{e^{i\pi(i(N+1/2)-x)} + e^{-i\pi(N+1/2)-x}}{e^{i\pi(i(N+1/2)-x)} - e^{-i\pi(N+1/2)-x}} \\ &= i \frac{1 + e^{-2\pi i(i(N+1/2)-x)}}{1 - e^{-2\pi i(i(N+1/2)-x)}}. \end{aligned}$$

Tomando modulo

$$|\cot \pi(i(N + 1/2) - x)| \leq \frac{e^{2\pi(N+1/2)} + 1}{e^{2\pi(N+1/2)} - 1} \leq K'$$

con  $K'$  una constante. Al igual que antes, dada la imparidad se tiene que también es acotada en  $L_4$ : así

$$\left| \int_{L_2, L_4} \pi \cot(\pi z) f(z) dz \right| \leq \frac{K'A}{N^2} (2N + 1). \quad (4.16)$$

De esta forma, tomando limite, las ecuaciones (4.15), (4.16), nos dice que la integral en (4.14) tiende a cero, por lo que se concluye

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{w_j} \text{Res}(\pi f(z) \cot \pi z, w_j), \quad (4.17)$$

donde  $w_j$  son los polos de  $f$ .

#### Ejemplo 4.4.11.

Calcule

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2},$$

donde  $a \neq 0$  in para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

#### Solución:

Tomemos  $f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$  y calculemos los residuos de  $f(z) \cot \pi z$  para ocupar (4.17). Un pequeño cálculo nos indica que

$$\begin{aligned} \text{Res}(f(z) \cot \pi z, z = ai) &= \frac{\pi}{2ai} \cot(\pi ai) \\ \text{Res}(f(z) \cot \pi z, z = -ai) &= \frac{-\pi}{2ai} \cot(-\pi ai) = \frac{\pi}{2ai} \cot(\pi ai), \end{aligned}$$

y de esta forma

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} &= \frac{\pi i}{a} \cot(\pi a i) \\ &= \frac{\pi}{a} \coth(\pi a).\end{aligned}$$

**Observación 4.4.8.**

En el ejemplo anterior hemos encontrado la descomposición en fracciones parciales de  $\frac{\pi}{z} \coth(\pi z)$ , pues lo anterior puede expresarse como

$$\frac{\pi}{z} \coth(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{z - in} + \frac{1}{z + in} \right] \frac{1}{2z},$$

por lo que

$$2\pi \coth(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{z - in} + \frac{1}{z + in} \right].$$

2. Sea  $f$  una función meromorfa sin polos en  $\mathbb{Z}$  tal que

$$|f(z)| \leq \frac{A}{|z|^2}.$$

Deseamos calcular la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n).$$

Consideremos la función compleja  $g(z) = \pi \csc(\pi z) f(z)$ , cuyo residuo en un polo cualquiera  $n \in \mathbb{Z}$  es

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(g(z), n) &= \lim_{z \rightarrow n} \frac{\pi(z - n)}{\sin(\pi z)} f(z) \\ &= \frac{1}{\cos(\pi n)} f(n) \\ &= (-1)^n f(n),\end{aligned}$$

y el camino cuadrado de vértices  $([N + 1/2] + i[N + 1/2])$ ,  $(-[N + 1/2] + i[N + 1/2])$ ,  $(-[N + 1/2] - i[N + 1/2])$ ,  $([N + 1/2] - i[N + 1/2])$  y procedemos de la misma manera hecha para encontrar (4.17). Dado que  $\csc z$  es acotada, pues

$$\csc^2 z - \cot^2 z = 1,$$

se tiene que la integral sobre el camino cuadrado tenderá a cero y denotando por  $w_j$  un polo cualquiera de  $f$  se concluirá que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = \sum_{w_j} \operatorname{Res}(\pi \csc(\pi z) f(z), w_j). \quad (4.18)$$

**Ejercicio 4.4.14.**

Calcule

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2},$$

y deduzca en particular que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

**Ejercicio 4.4.15.** Para una función meromorfa sin polos en  $\frac{1}{2}\mathbb{Z} = \{\frac{1}{2}z : z \in \mathbb{Z}\}$  tal que

$$|f(z)| \leq \frac{A}{|z|^2},$$

se cumple que:

a)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \sum_{w_j} \text{Res}(\pi \tan(\pi z) f(z), w_j),$$

b)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \sum_{w_j} \text{Res}(\pi \sec(\pi z) f(z), w_j),$$

donde  $w_j$  es un polo de  $f$ .

*Hint:* Considere un camino cuadrado de vértices  $[N+iN], [-N+iN], [-N-iN], [N-iN]$  y copie el desarrollo hecho para encontrar (4.17).

# Capítulo 5

## Fracciones parciales y productos infinitos

### 5.1. Fracciones parciales

#### Teorema 5.1.1.

Sea  $f$  una función meromorfa en  $\mathbb{C}$ . Denotamos por  $z_n$  sus polos sin repetición, ordenados de acuerdo a sus módulos, es decir  $|z_n| \leq |z_{n+1}|$  y denotamos  $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$  la parte principal del desarrollo en serie de Laurent de  $f$  entorno a  $z_n$ , la cual viene dada por

$$P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) = \frac{a_{-1}^n}{(z-z_n)} + \dots + \frac{a_{-k_n}^n}{(z-z_n)^{k_n}}.$$

Entonces existen polinomios  $q_n$  de grado  $r_n$  tal que

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - q_n(z) \right] + g(z),$$

donde  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es analítica y la convergencia de la serie es en compactos de  $\mathbb{C} \setminus \{z_n\}$ .

#### Observación 5.1.1.

Los polinomios  $q_n$  se agregan para garantizar la convergencia.

#### Demostración

Sin pérdida de generalidad supongamos que  $z_n \neq 0$ . Consideremos  $z$  fijo en algún compacto de  $\mathbb{C} \setminus \{z_n\}$ , entonces  $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$  es analítica en  $|z| < |z_n|$ . En  $D(0, R)$  con  $R < |z_n|$  consideramos

una expansión de orden  $r_n$  la cual de  $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$  denotaremos por  $q_n$ , así usando el teorema (hacer referencia), tenemos que

$$\left|P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - q_n(z)\right| \leq \frac{|z|^{r_n+1}}{R^{r_n}} \frac{M_n}{R-|z|},$$

con  $M_n = \max_{\partial D(0,R)} \left|P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)\right|$ . Si  $n$  es suficientemente grande, consideramos  $R = \frac{|z_n|}{2}$ , con lo cual  $|z| < \frac{|z_n|}{4}$ , así por el Teorema (3.2.3)

$$\begin{aligned} \left|P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - q_n(z)\right| &\leq \frac{|z_n|^{r_n+1}}{4^{r_n+1}} \cdot \frac{2^{r_n}}{|z_n|^{r_n}} \cdot \frac{M_n}{\left(\frac{|z_n|}{2} - \frac{|z_n|}{4}\right)} \\ &\leq \frac{M_n}{2^{r_n}}. \end{aligned}$$

Eligiendo  $r_n$  tal que

$$\frac{M_n}{2^{r_n}} < \frac{1}{2^n},$$

tenemos que  $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - q_n(z)$  converge uniformemente en compactos de  $\mathbb{C} \setminus \{z_n\}$ .

De esta forma  $h(z)$  es meromorfa con polos  $\{z_n\}$  con parte principal  $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$ , por lo que  $g(z) = f(z) - h(z)$  es analítica, lo que prueba el resultado.  $\square$

## 5.2. Productos infinitos

### Definición 5.2.1.

Sea  $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  un secuencia de números y consideremos

$$P_N = \prod_{k=1}^N z_k.$$

Diremos que:

- (i)  $P_N$  converge a  $P$  si  $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N = P \neq 0$ .
- (ii)  $P_N$  diverge a cero si  $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N = 0$ .
- (iii)  $P_N$  converge a cero si  $\prod_{z_k \neq 0} z_k$  converge y  $z_k = 0$  se cumple solo para un número finitos de índices.

**Observación 5.2.1.**

Supongamos que  $z_k \neq 0$  para todo  $k$ , entonces si  $P_N \rightarrow P$ , se debe tener que  $\frac{P_{N+1}}{P_N} \rightarrow 1$ . Entonces una condición necesaria para asegurar la convergencia es que  $z_k \rightarrow 1$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Por esta razón denotaremos el término general de  $P_N$  como  $1 + z_k$  con  $z_k \rightarrow 0$ ,  $z_k \neq -1$ .

**Proposición 5.2.1.**

Si  $z_k \neq -1$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , entonces  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + z_k)$  converge sí y solo sí  $\sum_{k=1}^{\infty} \log(1 + z_k)$  converge, donde  $\log(1 + z_k)$  es la rama principal del logaritmo para  $k$  grande.

**Demostración:**

Supongamos que  $\sum_{k=1}^{\infty} \log(1 + z_k)$  converge a  $S$ , es decir

$$\sum_{k=1}^N \log(1 + z_k) \rightarrow S \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty,$$

Tomando exponencial em el límite anterior obtenemos

$$e^{\sum_{k=1}^N \log(1+z_k)} \rightarrow e^S,$$

pero

$$e^{\sum_{k=1}^N \log(1+z_k)} = \prod_{k=1}^N (1 + z_k),$$

lo que concluye la implicancia.

Sin pérdida de generalidad supongamos que  $\log(1 + z_k)$  está bien definido para todo  $k$  y como  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + z_k) \neq 0$ , entonces para alguna rama del logaritmo, que denominaremos  $Log$ , podemos considerar  $Log(\prod_{k=1}^{\infty} (1 + z_k))$ . Entonces si  $N$  es suficientemente grande

$$Log\left(\prod_{k=1}^N (1 + z_k)\right) \rightarrow Log(P),$$

pero

$$Log\left(\prod_{k=1}^N (1 + z_k)\right) = \sum_{k=1}^N [\log(1 + z_k) + 2\pi i n_k],$$

de donde concluimos que  $n_k = 0$  para  $k$  grande, dado que esta serie converge.  $\square$

**Proposición 5.2.2.**

Sea  $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  un secuencia de numeros tal que  $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$  es convergente, entonces  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + z_k)$  es convergente.

**Demostración:**

Basta mostrar que  $\sum_{k=1}^{\infty} \log(1 + z_k)$  es convergente. Para eso basta notar que si  $|z| < 1/2$

entonces

$$\begin{aligned} |\log(1+z)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{k} \right| \\ &= |z| \left| 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \dots \right| \\ &\leq 2|z|, \end{aligned}$$

luego escogiendo  $k$  suficientemente grande para que  $|z_k| < 1/2$  se concluye el resultado.  $\square$

**Definición 5.2.2.**

Se dirá que  $\prod_{k=1}^{\infty} (1+z_k)$  converge absolutamente si  $\prod_{k=1}^{\infty} (1+|z_k|)$  converge.

**Proposición 5.2.3.**

Si  $\prod_{k=1}^{\infty} (1+z_k)$  converge absolutamente, entonces converge.

**Demostración:**

Notemos que se tiene la siguiente desigualdad

$$\sum_{k=1}^N |z_k| \leq \prod_{k=1}^N (1+|z_k|) \leq \prod_{k=1}^N e^{|z_k|} = e^{\sum_{k=1}^N |z_k|},$$

pues  $1+x \leq e^x$  si  $x \geq 0$ . Ahora bien, como  $\prod_{k=1}^{\infty} (1+|z_k|)$  converge, se tiene que  $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$  converge y por la proposición anterior se concluye.  $\square$

Nuestra intención es poder definir funciones analíticas en un dominio mediante productos infinitos.

**Proposición 5.2.4.**

Sean  $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  funciones analíticas para todo  $n \in \mathbb{N}$  con  $\Omega$  un dominio. Si  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$  converge uniformemente en compactos de  $\Omega$ , entonces  $\prod_{n=1}^{\infty} (1+f_n(z))$  define una función analítica en  $\Omega$ .

**Demostración:**

Consideremos  $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+f_n(z))$ . Sea  $K$  un compacto de  $\Omega$  y  $N$  independiente de  $z \in K$  tal que  $|f_n(z)| < 1/2$  para todo  $z \in K$ ,  $n \geq N$ . Dado que  $|\log(1+f_n(z))| \leq 2|f_n(z)|$  se tiene que

$$\sum_{n=N}^{\infty} |\log(1+f_n(z))| \leq 2 \sum_{n=N}^{\infty} |f_n(z)|,$$

expresión que converge uniformemente a cero en  $K$  cuando  $N \rightarrow \infty$ . Para concluir el resultado basta notar que  $\exp(\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+f_n(z)))$  converge uniformemente en  $K$ .  $\square$

**Teorema 5.2.1.** (Teorema de Weierstrass)

Sean  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  una sucesión en  $\mathbb{C}$  con  $\lambda_k \neq 0$  y tal que  $|\lambda_k| \rightarrow \infty$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , entonces la función entera más general que tiene como ceros la sucesión  $\{\lambda_k\}$  es de la forma

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) e^{P_k(z)},$$

donde  $P_k(z)$  son polinomios,  $g$  es una función entera.

**Demostración:**

Sea  $R > 0$  fijo. Supondremos que para todo  $k$   $|\lambda_k| > R$ . Si  $|z| < R$  tenemos

$$\log \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\lambda_k}\right)^n \frac{1}{n}.$$

Definimos

$$P_k(z) = \frac{z}{\lambda_k} + \frac{z^2}{2\lambda_k^2} + \dots + \frac{z^{m_k}}{m_k \lambda_k^{m_k}}.$$

Escogemos  $k_0(R)$  tal que si  $k \geq k_0(R)$  entonces  $\lambda_k > 2R$ . Entonces si  $|z| < R$  obtenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \log \left[1 - \frac{z}{\lambda_k}\right] + P_k(z) \right) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{z^{m_k+1}}{(m_k+1)\lambda_k^{m_k+1}} + \frac{z^{m_k+2}}{(m_k+2)\lambda_k^{m_k+2}} + \dots \right] \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{z^{m_k+1}}{(m_k+1)\lambda_k^{m_k+1}} \right| \left[ 1 + \left| \frac{z}{\lambda_k} \right| + \left| \frac{z^2}{\lambda_k^2} \right| + \dots \right] \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^{m_k+1}}{(m_k+1)|\lambda_k|^{m_k+1}} \left( 1 - \left| \frac{z}{\lambda_k} \right| \right)^{-1}, \end{aligned}$$

y también si  $k \geq k_0(R)$ , entonces

$$\left( 1 - \left| \frac{z}{\lambda_k} \right| \right)^{-1} \leq 2,$$

por lo que tomando  $m_k = k$ , obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \log \left[1 - \frac{z}{\lambda_k}\right] + P_k(z) \right) \leq \sum_{k=1}^{k_0(R)} \left| \frac{z}{\lambda_k} \right|^k \frac{1}{k+1} \left( 1 - \left| \frac{z}{\lambda_k} \right| \right)^{-1} + \sum_{k_0(R)}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^k \frac{1}{k+1} \cdot 2,$$

la cual es uniformemente convergente. Es fácil ver que dado

$$g_n(z) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) e^{P_k(z)},$$

sus únicos ceros son  $z = \lambda_k$ , con  $k = 1, \dots, n$ . Luego como  $g_n(z)$  converge uniformemente a  $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) e^{P_k(z)}$  en compactos de  $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  se tiene que los únicos ceros de  $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) e^{P_k(z)}$  son  $\lambda_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Sea ahora  $h(z)$  una función analítica con ceros  $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , entonces

$$\frac{h(z)}{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) e^{P_k(z)}},$$

es entera y sin ceros, por lo que

$$\frac{h(z)}{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) e^{P_k(z)}} = e^{g(z)},$$

con  $g(z)$  entera con lo que concluimos que

$$h(z) = e^{g(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) e^{P_k(z)} \square.$$

### Observación 5.2.2.

Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica con ceros  $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , tal que  $f(0) = 0$  y el orden del cero es  $m$ , entonces

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) e^{P_k(z)}.$$

**Observación 5.2.3.** Recordemos que si  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|} < \infty$ , entonces  $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right)$  converge, por lo que no necesitamos incluir  $e^{P_k(z)}$  para que el producto converja. En general tenemos que si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|^m} < \infty,$$

entonces basta considerar  $P_k(z) = \frac{z}{\lambda_k} + \dots + \frac{1}{m} \frac{z^{m-1}}{\lambda_k^{m-1}}$ , para que el producto converja.

### Ejemplo 5.2.1.

Encuentre la descomposición en producto infinito de  $\sin(\pi z)$ .

#### Solución:

Los ceros de  $\sin(\pi z)$  son  $z \in \mathbb{Z}$  y como  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  converge se tiene que

$$\sin(\pi z) = e^{g(z)} z \prod_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) e^{z/k}.$$

Para encontrar  $g(z)$  tomamos derivada logarítmica, con lo cual obtenemos que

$$\begin{aligned}\pi \cot(\pi z) &= g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \left[ \frac{-1/k}{(1-z/n)} + \frac{1}{k} \right] \\ &= g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) \\ &= g'(z) + \pi \cot(\pi z),\end{aligned}$$

con lo cual obtenemos que  $g(z) = c$  es constante. Así

$$\sin(\pi z) = e^c z \prod_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{k} \right) e^{z/k},$$

pero sabemos que  $\frac{\sin(\pi z)}{z} \rightarrow \pi$  cuando  $z \rightarrow 0$ , con lo que concluimos que  $e^c = \pi$ .

### Ejemplo 5.2.2.

Sea  $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$  con  $|a_n| \rightarrow \infty$  y  $A_n$  una secuencia de números complejos. Pruebe que existe una función  $f$  analítica en  $\mathbb{C}$  que satisface  $f(a_n) = A_n$ . *Hint:* Sea  $g$  una función con ceros simples en  $\{a_n\}$ . Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(z) \frac{e^{\gamma_n(z-a_n)}}{z-a_n} \frac{A_n}{g'(a_n)},$$

converge para una elección apropiada de  $\gamma_n$ .

### Solución:

Demostremos la indicación, sea  $z$  fijo en  $D(0, R)$  y  $n$  suficientemente grande tal que  $a_n > 2R$ . Consideremos  $\gamma_n = \bar{a}_n \beta_n$ , con  $\beta_n \rightarrow \infty$ , así

$$\begin{aligned}\left| \sum_{n=1}^{\infty} g(z) \frac{e^{\gamma_n(z-a_n)}}{z-a_n} \frac{A_n}{g'(a_n)} \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g(z)| e^{\beta_n |a_n|(R-|a_n|)}}{R} \left| \frac{A_n}{g'(a_n)} \right| \\ &\leq \max_{z \in \partial D(0, R)} |g(z)| \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n |a_n|} \left| \frac{A_n}{g'(a_n)} \right|,\end{aligned}$$

luego escogiendo  $\beta_n$  tal que el sumando sea menor o igual que  $\frac{1}{n^2}$  se obtiene que la serie converge uniformemente en compactos de  $\mathbb{C}$ , definiendo así una función analítica. Llamando

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g(z) \frac{e^{\gamma_n(z-a_n)}}{z-a_n} \frac{A_n}{g'(a_n)},$$

es fácil probar que  $f(a_n) = A_n$ .

**Ejercicio 5.2.1.**

En este ejercicio de probar el Teorema de Weierstrass de descomposición en producto infinito a partir de la descomposición en fracciones parciales.

- (i) Sea  $a_n$  una secuencia en  $\mathbb{C}$ , con  $|a_n| \rightarrow \infty$ ,  $a_n \neq 0$  para todo  $n$ . Demuestre que existe una secuencia de enteros  $k_n$  tal que

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \left( \frac{z}{a_n} \right) + \dots + \frac{1}{a_n} \left( \frac{z}{a_n} \right)^{k_n-1} \right),$$

es una función meromorfa con polos simples en  $a_n$  para todo  $n$ .

- (ii) Sea  $z \in \mathbb{C} \setminus \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , demuestre que si  $\gamma_1, \gamma_2$  son dos curvas suaves en  $\mathbb{C} \setminus \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de 0 a  $z$  entonces

$$\int_{\gamma_1} h - \int_{\gamma_2} h = 2\pi im,$$

con  $m$  entero.

- (iii) Pruebe que si  $\gamma$  es cualquier curva suave en  $\mathbb{C} \setminus \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de 0 a  $z$ , entonces

$$f(z) = e^{\int_{\gamma} h},$$

define una función analítica en  $\mathbb{C} \setminus \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

- (iv) Pruebe que si  $z \in \{a_1, a_2, \dots\}$  entonces  $z$  es una singularidad removible de  $f$ , más aún  $f(z) = 0$  y la multiplicidad de  $z$  es igual al número de veces que  $z$  está repetido en la secuencia de  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

- (v) Pruebe que

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right) \exp \left( \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{a_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{k_n} \left( \frac{z}{a_n} \right)^{k_n} \right).$$

**Ejercicio 5.2.2.**

Pruebe las siguientes expansiones:

(i)  $\cos(\pi z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2} \right).$

(ii)  $\sin(z + \alpha) = e^{\pi z \cot(\pi \alpha)} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z}{n+\alpha} \right) e^{-\frac{z}{n+\alpha}}.$

(iii)  $\prod_{n=2}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{2}.$

# Capítulo 6

## Funciones Especiales

### 6.1. La Función gamma

La función más simple cuyos ceros están dados por  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  está dada por

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}.$$

En el capítulo anterior vimos que la descomposición en fracciones parciales de  $\sin \pi z$  viene dada por

$$\sin \pi z = z\pi \prod_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n},$$

por lo que  $G(z)$  cumple que

$$zG(z)G(-z) = \frac{\sin \pi z}{\pi}.$$

Observemos que  $G(z-1)$  tiene los mismos ceros que  $G(z)$ , luego

$$G(z-1) = ze^{\gamma(z)}G(z),$$

donde  $\gamma(z)$  es una función entera. Para determinar  $\gamma(z)$  tomemos derivada logarítmica a ambos lados de la ecuación, de este modo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \gamma'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right),$$

pero

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n} \right) &= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).\end{aligned}$$

Con esto obtenemos  $\gamma'(z) = 0$ , por lo que  $\gamma(z) = \gamma$  resulta ser constante, llamada constante de Euler, la cual viene dada por la expresión

$$e^{-\gamma} = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) e^{-1/n},$$

o de forma equivalente

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right).$$

Ahora si  $H(z) = e^{\gamma z} G(z)$  se tiene que

$$\begin{aligned}H(z-1) &= G(z-1)e^{\gamma(z-1)} \\ &= zH(z),\end{aligned}$$

por lo que definiendo

$$\Gamma(z) = \frac{1}{zH(z)}$$

se tiene que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

A la función  $\Gamma(z)$  se le llama la función gamma de Euler, la cual de manera explícita viene dada por

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z}{n} \right)^{-1} e^{-\frac{z}{n}}. \quad (6.1)$$

### Ejercicio 6.1.1.

Pruebe que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

y en particular que  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .

### Observación 6.1.1.

La función  $\Gamma(z)$  es una función meromorfa con polos simples en  $z = 0, -1, -2, \dots$  y sin ceros. Además se cumple que  $\Gamma(n) = (n-1)!$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Proposición 6.1.1.** (Fórmula de Gauss)

La función  $\Gamma(z)$  cumple

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)}.$$

**Demostración:**

Por definición de la función  $\Gamma$  tenemos que

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n} = 1 + \frac{z}{n} = \frac{n}{n+z},$$

por lo que

$$\Gamma(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{z(1+1/2+1/3+\dots+1/N-\log N-\gamma)} e^{z \log N} \frac{N!}{z(z+1) \cdots (z+N)}.$$

Debido a la por definición de  $\gamma$  se tiene que  $e^{z(1+1/2+1/3+\dots+1/N-\log N)} \rightarrow 1$  y  $e^{z \log N} = N^z$ , y así la ecuación anterior se transforma en

$$\Gamma(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!N^z}{z(z+1) \cdots (z+N)}. \square$$

**Proposición 6.1.2.**

El residuo de la función  $\Gamma(z)$  en un polo cualquiera  $-n$  viene dado por

$$\text{Res}(\Gamma(z), -n) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

**Demostración:**

Dado que los polos son simples

$$\text{Res}(\Gamma(z), -n) = \lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z),$$

pero

$$\begin{aligned} \Gamma(z+n+1) &= (z+n)(z+n-1) \cdots z\Gamma(z), \text{ luego} \\ \Gamma(z) &= \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+n)(z+n-1) \cdots z}. \end{aligned}$$

Reemplazando esto en el límite, obtenemos que

$$\text{Res}(\Gamma(z), -n) = \frac{\Gamma(1)}{-n(-n+1) \cdots (-n+n-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}. \square$$

**Ejemplo 6.1.1.**

*Demuestre la fórmula de duplicación de Legendre*

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

**Solución:**

Considerando la segunda derivada de  $\log \Gamma(z)$  en (6.1) se tiene que

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left( \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \right) + \frac{d}{dz} \left( \frac{\Gamma'(z + \frac{1}{2})}{\Gamma(z + \frac{1}{2})} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n+\frac{1}{2})^2} \\ &= 4 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2z+2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2z+2n+1)^2} \right] \\ &= 4 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2z+m)^2} \\ &= 2 \frac{d}{dz} \left( \frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)} \right), \end{aligned}$$

por lo que integrando tenemos

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = e^{az+b}\Gamma(2z),$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes a determinar. Dado que  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ,  $\Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma(1 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$  y  $\Gamma(2) = 1$  se tienen las siguientes ecuaciones

$$\frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2} \log \pi, \quad a + b = \frac{1}{2} \log \pi - \log 2.$$

Así

$$a = -2 \log 2, \quad b = \frac{1}{2} \log \pi + \log 2,$$

por lo que

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

**Ejercicio 6.1.2.**

Pruebe que

$$(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(z) = n^{z-\frac{1}{2}} \prod_{j=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{z+j}{n}\right).$$

**Teorema 6.1.1.**

Para  $\operatorname{Re}(z) > 0$  se cumple que

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (6.2)$$

**Demostración:**

Sean

$$f_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt, \quad \text{y} \quad f(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt,$$

y probemos que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en compactos de  $D = \{z : \operatorname{Re}(z) > 0\}$  o equivalentemente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left[ e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{z-1} dt = 0,$$

pues

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-t} t^{z-1} dt,$$

uniformemente. Si  $|t| < n$ , entonces se cumplen las siguientes desigualdades

$$1 + \frac{t}{n} \leq e^{t/n} \leq \frac{1}{1 - \frac{t}{n}}, \quad \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t, \quad \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t},$$

lo que implica que para  $|t| < n$  se tiene que

$$\begin{aligned} 0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n &= e^{-t} \left[ 1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] \\ &\leq e^{-t} \left[ 1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \right] \\ &= e^{-t} \frac{t^2}{n^2} \left[ 1 + \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right) + \dots + \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^{n-1} \right] \\ &\leq \frac{t^2 e^{-t}}{n}. \end{aligned}$$

Así

$$\left| \int_0^n \left[ e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{z-1} dt \right| < \frac{1}{n} \int_0^n e^{-t} t^{x+1} dt < \frac{1}{n} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x+1} dt,$$

donde  $x = \operatorname{Re}(z)$ , lo que prueba que  $f_n(z) \rightarrow f(z)$  uniformemente en compactos de  $\operatorname{Re}(z) > 0$ . Probemos ahora que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \Gamma(z) \quad z \in D.$$

Considerando el cambio  $t = n\tau$  se tiene que

$$f_n(z) = n^z \int_0^1 (1 - \tau)^n \tau^{z-1} d\tau. \quad (6.3)$$

Integrando (6.3) por partes  $n$  veces, obtenemos que

$$f_n(z) = \frac{n!n^z}{z(z+1) \cdots (z+n-1)} \int_0^1 \tau^{z+n-1} d\tau = \frac{n!n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)},$$

lo que prueba el resultado.  $\square$

### 6.1.1. La fórmula de Stirling

Nuestra intención es probar la fórmula de Stirling

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} e^{J(z)}, \quad (6.4)$$

donde  $J(z) \rightarrow 0$  cuando  $z \rightarrow \infty$ . Para demostrar la fórmula de duplicación de Legendre utilizamos que

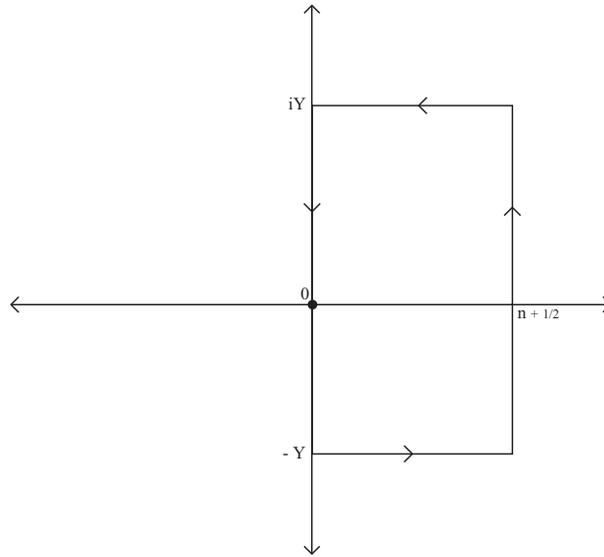
$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

Nuestra intención es expresar esta serie como una integral de línea. Consideremos la función

$$\phi(\zeta) = \frac{\pi \cot \pi \zeta}{(z + \zeta)^2},$$

cuyos residuos son los términos de la suma anterior. Sea  $K$  la frontera del rectángulo en el plano  $(\xi, \eta)$ , cuyos lados verticales están dados por  $\xi = 0$  y  $\xi = n + \frac{1}{2}$  y con lados horizontales  $\eta = \pm Y$ . Nuestra intención es hacer tender primero  $Y$  y después  $n$  a infinito. Este contorno pasa a través del polo en 0, pero sabemos que la fórmula de los residuos sigue siendo válida, dado que tomamos el valor principal de la integral y medio valor del residuo, luego

$$\frac{1}{2\pi i} \int_K \phi(\zeta) d\zeta = -\frac{1}{2z^2} + \sum_{i=0}^n \frac{1}{(z+i)^2}.$$



Nota: 0 es polo

En los lados horizontales del rectángulo la función  $\cot\pi\zeta$  tiende uniformemente a  $\pm i$  cuando  $Y \rightarrow \infty$  y dado que  $1/(z+\zeta)^2$  tiende a cero, tenemos que las integrales correspondientes tienden a a cero. La integral sobre la línea  $\xi = n + \frac{1}{2}$  está dada por

$$\int_{\xi=n+\frac{1}{2}} \phi(\zeta) d\zeta = c \int_{\xi=n+\frac{1}{2}} \frac{d\eta}{|\zeta + z|^2}.$$

con  $c$  constante. Esta última integral puede ser evaluada usando residuos, y se obtiene que

$$\int_{\xi=n+\frac{1}{2}} \frac{d\eta}{|\zeta + z|^2} = \frac{2\pi}{2n + 1 + 2x},$$

cuyo límite es cero cuando  $n \rightarrow \infty$ .

El valor principal de la integral sobre el eje imaginario de  $i\infty$  a  $-i\infty$  puede ser escrito de la forma

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \cot \pi i \eta \left[ \frac{1}{(i\eta + z)^2} - \frac{1}{(i\eta - z)^2} \right] d\eta = - \int_0^\infty \coth \pi \eta \frac{2\eta z}{(\eta^2 + z^2)^2} d\eta,$$

con lo cual obtenemos que

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \right) = \frac{1}{2z^2} + \int_0^\infty \coth \pi \eta \frac{2\eta z}{(\eta^2 + z^2)^2} d\eta. \quad (6.5)$$

Esta integral define una función analítica en  $Re(z) > 0, Im(z) > 0$ , pero tiene un polo en  $z = 0$ . Escribiendo

$$\coth \pi \eta = 1 + \frac{2}{e^{2\pi\eta} - 1},$$

podemos reescribir (6.5) como

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \right) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \int_0^\infty \frac{4\eta z}{(\eta^2 + z^2)^2} \cdot \frac{d\eta}{e^{2\pi\eta} - 1}.$$

Tomando  $z$  restringido a  $\{z : \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ , vemos que la fórmula anterior puede ser integrada, de esta forma

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = C + \log(z) - \frac{1}{2z} - \int_0^\infty \frac{2\eta}{\eta^2 + z^2} \cdot \frac{d\eta}{e^{2\pi\eta} - 1}, \quad (6.6)$$

donde hemos tomado la rama principal del logaritmo y  $C$  es la constante de integración. Queremos volver a integrar, lo que introduciría  $\arctan(z/\eta)$  en la integral, pero para evitar el uso de funciones multivaluadas, transformamos la integral de (6.6) via integración por partes para obtener

$$\int_0^\infty \frac{2\eta}{\eta^2 + z^2} \cdot \frac{d\eta}{e^{2\pi\eta} - 1} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{z^2 - \eta^2}{(\eta^2 + z^2)^2} \log(1 - e^{-2\pi\eta}) d\eta,$$

donde el logaritmo es real. Ahora integramos (6.6) con respecto a  $z$  y obtenemos

$$\log \Gamma(z) = C' + Cz + \left( z - \frac{1}{2} \right) \log z + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{z}{\eta^2 + z^2} \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi\eta}} d\eta, \quad (6.7)$$

donde  $C'$  es una constante de integración y  $C - 1$  se ha renombrado a  $C$ .

Falta determinar los valores de  $C'$  y  $C$ . Para esto debemos primero estudiar el comportamiento de

$$J(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{z}{\eta^2 + z^2} \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi\eta}} d\eta.$$

Supongamos que  $z$  pertenece al plano semiplano  $x \geq M > 0$ , de esta forma

$$J(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{|z|/2} \frac{z}{\eta^2 + z^2} \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi\eta}} d\eta + \frac{1}{\pi} \int_{|z|/2}^\infty \frac{z}{\eta^2 + z^2} \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi\eta}} d\eta = J_1(z) + J_2(z).$$

En la primera integral  $|\eta^2 + z^2| \geq |z|^2 - |z/2|^2 = 3|z|^2/4$ , por lo que

$$|J_1(z)| \leq \frac{4}{3\pi|z|} \int_0^\infty \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi\eta}} d\eta.$$

En la segunda integral  $|\eta^2 + z^2| = |z - i\eta| \cdot |z + i\eta|$ , y así

$$|J_2(z)| = \left| \frac{1}{\pi c} \int_{|z|/2}^\infty \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi\eta}} d\eta \right|$$

Dado que la integral de  $\log(1 - e^{-2\pi\eta})^{-1}$  es convergente, concluimos que  $J_1$  y  $J_2$  tienden a 0 cuando  $z \rightarrow \infty$ .

El valor de  $C$  lo encontramos sustituyendo (6.7) en la ecuación funcional  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ , lo que nos entrega

$$C' + Cz + C + \left(z + \frac{1}{2}\right) \log(z+1) + J(z+1) = C' + Cz + \left(z + \frac{1}{2}\right) \log z + J(z),$$

lo que se reduce a

$$C = -\left(z + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{z}\right) + J(z) - J(z+1),$$

por lo que tomando  $z \rightarrow \infty$  obtenemos  $C = -1$ . Ahora aplicamos (6.7) a la ecuación

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi / \sin \pi z$$

eligiendo  $z = \frac{1}{2} + iy$ , luego

$$2C' - 1 + iy \log\left(\frac{1}{2} + iy\right) - iy \log\left(\frac{1}{2} - iy\right) + J\left(\frac{1}{2} + iy\right) + J\left(\frac{1}{2} - iy\right) = \log \pi - \log \cosh \pi y.$$

Sabemos que cuando  $y \rightarrow \infty$ ,  $J(1/2+iy)$  y  $J(1/2-iy)$  tienden a cero. Desarrollando el logaritmo en serie, tenemos que

$$iy \log \frac{\frac{1}{2} + iy}{\frac{1}{2} - iy} = iy \left( \pi i + \log \frac{1 + \frac{1}{2iy}}{1 - \frac{1}{2iy}} \right) = -\pi y + \varepsilon_1(y),$$

mientras que

$$\log \cosh \pi y = \pi y - \log 2 + \varepsilon_2(y),$$

con  $\varepsilon_1(y)$ ,  $\varepsilon_2(y)$  tendiendo a 0. Lo anterior implica que  $C' = \frac{1}{2} \log 2\pi$ , por lo que hemos probado que

$$\log \Gamma(z) = \frac{1}{2} \log 2\pi - z + \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z + J(z),$$

o equivalentemente

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} e^{J(z)}.$$

### Ejercicio 6.1.3.

Para  $x > 0$  real pruebe que

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\theta(x)/12x},$$

con  $0 < \theta(x) < 1$ .

## 6.2. La función zeta de Riemann

Sea  $z$  tal que  $Re(z) > 1$  entonces la función

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}, \quad (6.8)$$

converge uniformemente y define una función analítica. La función (6.8) es conocida como la función Zeta de Riemann y juega un rol importante en la teoría de números.

### Teorema 6.2.1.

Para  $z \in \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 1\}$  se tiene que

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-z}),$$

donde  $p_n$  es la secuencia de primos.

### Demostración:

Probemos que

$$\zeta(z) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-z}) = 1,$$

multiplicando los términos. Así

$$\zeta(z)(1 - 2^{-z}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} - \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{-z} = \sum_{m=1}^{\infty} (m)^{-z},$$

donde  $m$  recorre todos los números impares. Bajo el mismo razonamiento

$$\zeta(z)(1 - 2^{-z})(1 - 3^{-z}) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-z},$$

donde  $m$  recorre todos los enteros que no son divisibles por 2 y 3. Más generalmente

$$\zeta(z)(1 - 2^{-z})(1 - 3^{-z}) \cdots (1 - p_N^{-z}) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-z},$$

donde la suma anterior recorre todos los enteros que no contienen ningún factor primo  $2, 3, \dots, p_N$ . El primer término de la suma es 1, y el próximo es  $p_{N+1}^{-z}$ , por lo que todos los términos excepto el primero tienden a cero cuando  $N \rightarrow \infty$ , con lo que se concluye que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \zeta(z) \prod_{n=1}^N (1 - p_n^{-z}) = 1. \square$$

**Proposición 6.2.1.** Para  $z \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\}$  se tiene que

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^\infty u^{z-1} \frac{1}{e^u - 1} du. \quad (6.9)$$

**Demostración:**

Ocupando la fórmula (6.2) tenemos que

$$n^{-z}\Gamma(z) = \int_0^\infty \left(\frac{t}{n}\right)^{z-1} \frac{1}{n} e^{-t} dt,$$

por lo que haciendo el cambio de variables  $u = \frac{t}{n}$  obtenemos

$$n^{-z}\Gamma(z) = \int_0^\infty u^{z-1} e^{-nu} du.$$

Sumando y teniendo en cuenta la convergencia uniforme, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty n^{-z}\Gamma(z) &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty u^{z-1} e^{-nu} du \\ &= \int_0^\infty u^{z-1} \sum_{n=1}^\infty e^{-nu} du, \end{aligned}$$

y utilizando

$$\sum_{n=1}^\infty e^{-nu} = \frac{1}{e^u - 1},$$

se concluye el resultado.  $\square$

### 6.2.1. Extensión de $\zeta(z)$ a todo el plano

Usando (6.9) extenderemos la función  $\zeta(z)$  a  $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ . Notemos que

$$\frac{1}{e^u - 1} = \frac{1}{u} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n u^n,$$

la cual tiene un radio de convergencia de  $2\pi$ . Escribamos

$$\int_0^\infty u^{z-1} \frac{1}{e^u - 1} du = \int_0^1 u^{z-1} \left[ \frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} \right] du + \int_0^1 u^{z-1} \frac{1}{u} du + \int_1^\infty \frac{u^{z-1}}{e^u - 1} du.$$

La expresión

$$\int_0^1 u^{z-1} \left[ \frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} \right] du,$$

define una función analítica en  $Re(z) > 0$ . Por otra parte si  $Re(z) > 1$  tenemos que

$$\int_0^1 u^{z-1} \frac{1}{u} du = \frac{1}{z-1} u^{z-1} \Big|_0^1 = \frac{1}{z-1}.$$

Así podemos extender la función  $\int_0^\infty u^{z-1} \frac{1}{e^u-1} du$  a  $Re(z) > 0$ ,  $z \neq 1$  como

$$\int_0^1 u^{z-1} \left[ \frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u} \right] du + \frac{1}{z-1} + \int_1^\infty \frac{u^{z-1}}{e^u-1} du.$$

Extendamos ahora  $\zeta(z)$  como una función meromorfa a  $Re(z) > 0$ ,  $z \neq -1$ . Por la relación (6.9) tenemos que

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^1 u^{z-1} \left[ \frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u} \right] du + \frac{1}{z-1} + \int_1^\infty \frac{u^{z-1}}{e^u-1} du,$$

por lo que definimos

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \left( \int_0^1 u^{z-1} \left[ \frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u} \right] du + \frac{1}{z-1} + \int_1^\infty \frac{u^{z-1}}{e^u-1} du \right),$$

para  $Re(z) > 0$ ,  $z \neq 1$ .

### Observación 6.2.1.

Usando la extensión anterior vemos que la función  $\zeta(z)$  tiene un polo simple en  $z = 1$  y su residuo es 1.

Extendamos ahora  $\zeta(z)$  a  $Re(z) > -1$ . Consideremos

$$\int_0^1 u^{z-1} \left[ \frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u} \right] du = \int_0^1 \left[ \frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right] u^{z-1} du - \int_0^1 \frac{1}{2} u^{z-1} du,$$

donde la integral

$$\int_0^1 \left[ \frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right] u^{z-1} du,$$

está bien definido para  $Re(z) > -1$ . Integrando

$$- \int_0^1 \frac{1}{2} u^{z-1} du = \frac{1}{2z} u^{z-1} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2z},$$

para  $Re(z) > 0$ . Luego

$$\int_0^1 u^{z-1} \left[ \frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u} \right] du = \int_0^1 \left[ \frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right] du - \frac{1}{2z},$$

para  $Re(z) > -1, \neq 1$ . Así podemos extender  $\zeta(z)$  como

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \left( \int_0^1 \left[ \frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right] du - \frac{1}{2z} + \frac{1}{z-1} + \int_1^\infty \frac{u^{z-1}}{e^u - 1} du \right).$$

Dado que  $\Gamma(z)$  tiene un polo simple en cero, la función  $\zeta(z)$  resulta ser analítica en  $z = 0$ . De esta forma  $\zeta(z)$  esta definida en  $Re(z) > -1, z \neq 1$ .

Para poder extender  $\zeta(z)$  a todo el plano complejo deberemos demostrar el siguiente teorema.

**Teorema 6.2.2.** (*Ecuación Funcional de Riemann*)

Para  $1 < Re(z) < 2$  se cumple que

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1} \Gamma(1-z) \zeta(1-z) \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right). \quad (6.10)$$

**Demostración:**

Utilizando la relación

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^\infty u^{z-1} \left[ \frac{1}{e^u - 1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{u} \right] du,$$

y observando

$$\frac{1}{e^u - 1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{e^u + 1}{e^u - 1} \right] = \frac{i}{2} \cot\left(\frac{iu}{2}\right),$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\zeta(z) &= 2 \left[ \int_0^\infty u^z \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{u^2 + 4n^2\pi^2} du \right] \\ &= 2 \left[ \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \frac{u^z}{u^2 + 4n^2\pi^2} du \right], \end{aligned}$$

donde hemos usado la descomposición en fracciones parciales de  $\cot(\frac{iu}{2})$ . Probemos la fórmula para el caso real  $z = x \in (-1, 0)$ . Ocupando residuos encontramos que

$$2 \left[ \int_0^\infty \frac{u^x}{u^2 + 1} du \right] = \frac{1}{2} \pi \sec\left(\frac{\pi x}{2}\right),$$

lo cual nos indica que

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\zeta(x) &= 2 \left[ \sum_{n=1}^\infty \frac{2\pi n(2\pi n)^x}{(2\pi n)^2} \int_0^\infty \frac{(u/2\pi n)^x}{(u/2\pi n)^2 + 1} \frac{1}{2\pi n} du \right] \\ &= 2 \left[ \sum_{n=1}^\infty (2\pi n)^{x-1} \frac{\pi}{2} \sec\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right] \\ &= (2\pi)^{x-1} \zeta(1-x) \pi \sec\left(\frac{\pi x}{2}\right). \end{aligned}$$

Usando la identidad

$$\Gamma(1-x)\Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{\pi}{2 \cos(1/2\pi x) \sin(1/2\pi x)},$$

concluimos el resultado.  $\square$

Usando la ecuación funcional podemos extender  $\zeta : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$  a una función meromorfa con polo simple en  $z = 1$ .

Analicemos ahora los ceros de la función  $\zeta$ . Como la función  $\zeta(z)$  es analítica y sin ceros en  $z = 2, 3, \dots$  y  $\Gamma(z)$  tiene polos simples en esos puntos se debe tener que

$$\zeta(1-z) \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) = 0 \quad \forall z = 2, 3, \dots$$

y los ceros de  $\zeta(1-z) \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)$  deben ser simples. De esta forma, si  $z = 2m$  con  $m \in \mathbb{N}$  entonces  $\sin\left(\frac{2m\pi}{2}\right) = 0$ , por lo que  $\zeta(1-2m) \neq 0$ . Si  $z = 2m+1$ , entonces  $\zeta(1-(2m+1)) = \zeta(2m) = 0$ , por lo tanto  $-2, -4, \dots$  son los ceros triviales de la función  $\zeta(z)$ .

### Ejercicio 6.2.1.

Demuestre la siguiente fórmula

$$\zeta(1-z) = 2^{1-z} \pi^{-z} \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(z) \zeta(z). \quad (6.11)$$

### Ejemplo 6.2.1.

Demuestre que la función

$$\xi(z) = \frac{1}{2} z(1-z) \pi^{-z/2} \Gamma(z/2) \zeta(z),$$

es entera y satisface  $\xi(z) = \xi(1-z)$ .

### Solución:

Veamos que es entera. Para esto basta notar que el factor  $1-z$  anula el polo de  $\zeta(z)$  y los polos de  $\Gamma(z/2)$  se cancelan con los ceros triviales de  $\zeta(z)$ . Usando (6.11) la ecuación  $\xi(z) = \xi(1-z)$  se transforma en

$$\pi^{-z/2} \Gamma(z/2) \zeta(z) = \pi^{(z-1)/2} \Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) \zeta(1-z) = 2^{1-z} \pi^{-(z+1)/2} \Gamma(z) \Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right),$$

lo que es equivalente a

$$\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(z) \Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) = 2^{z-1} \pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right).$$

Dado que

$$\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right) = \frac{\pi}{\cos(1/2\pi z)},$$

la ecuación anterior se reduce a

$$\pi^{1/2}\Gamma(z) = 2^{z-1}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right),$$

la cual no es más que la fórmula de duplicación de Legendre.

### Ejercicio 6.2.2.

Para los siguientes problemas considere que las fórmulas valen para  $\operatorname{Re}(z) > A$  con  $A > 1$  apropiado a cada caso:

1. Pruebe que

$$\zeta^2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^z},$$

donde  $d(n)$  es el número de divisores de  $n$ .

2. Pruebe que

$$\zeta(z)\zeta(z-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^z},$$

donde  $\sigma(n)$  es la suma de los divisores de  $n$ .

3. Pruebe que

$$\frac{\zeta(z-1)}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n^z},$$

donde  $\phi(n)$  es el número de enteros menores que  $n$  que son relativamente primos a  $n$ .

# Capítulo 7

## Funciones Armónicas

### 7.1. Propiedades básicas

Recordemos que si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es analítica, entonces  $Re(f)$  y  $Im(f)$  son armónicas.

**Proposición 7.1.1.**

*Si  $u$  es armónica en una región  $\Omega$ , entonces*

$$f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (7.1)$$

*define una función analítica.*

**Demostración:**

Basta chequear las condiciones de Cauchy-Riemann.  $\square$

Suponga que  $f$  se define usando

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) (dx + idy), \\ f dz &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + i \left( -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right). \end{aligned} \quad (7.2)$$

En esta expresión la parte real es el diferencial de  $u$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Si  $u$  tiene conjugada armónica  $v$ , entonces la parte imaginaria se podría escribir como

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy.$$

En general no hay conjugada de  $u$ , por lo que se define

$$*du = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy,$$

la cual se llama la conjugada diferencial de  $du$ . De esta forma tenemos que

$$fdz = du + i *du.$$

Por el Teorema de Cauchy tenemos que la integral de  $fdz$  es cero en cualquier curva cerrada simple y por otro lado la integral del diferencial exacto  $du$  también es cero. De esta forma obtenemos que

$$\int_{\gamma} *du = \int_{\gamma} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy = 0, \quad (7.3)$$

donde  $\gamma$  es una curva cerrada simple.

### Teorema 7.1.1.

Si  $u_1, u_2$  son dos funciones armónicas en una región  $\Omega$ , entonces

$$\int_R u_1 *du_2 - u_2 *du_1 = 0, \quad (7.4)$$

para cada ciclo  $R$  homótopo a cero en  $\Omega$ .

### Demostración:

Razonando como en el Teorema (4.1.1), basta probar para el caso en que  $\gamma = \partial R$  con  $R$  un rectángulo contenido en  $\Omega$ . En  $R$ ,  $u_1$  y  $u_2$  tienen funciones conjugadas  $v_1, v_2$ , por lo que podemos escribir

$$u_1 *du_2 - u_2 *du_1 = u_1dv_2 - u_2dv_1 = u_1dv_2 + v_1du_2 - d(u_2v_1).$$

Aquí  $d(u_2v_1)$  es un diferencial exacto y  $u_1dv_2 + v_1du_2$  es la parte imaginaria de

$$(u_1 + iv_1)(du_2 + idv_2),$$

la cual puede ser reescrita de la forma  $F_1f_2$ , donde  $F_1(z)$  y  $f_2(z)$  son analíticas en  $R$ .(mencionar teorema 4.1)□

## 7.2. El Teorema del valor medio

En (7.4) consideremos  $u_1 = \log(r)$ , armónica en  $0 < r < \infty$  y  $u_2 = u$  una función armónica en  $|z| < \rho$ . Consideremos  $z \in \Omega$  con  $0 < |z| < \rho$  y  $C_1, C_2$ , donde  $C_i$  es un círculo centrado en 0 y de radio  $r_i < \rho$ . En  $|z| = r$  tenemos que  $*du = r \frac{\partial u}{\partial r} d\theta$  y así (7.4) se transforma a

$$\log(r_1) \int_{C_1} r_1 \frac{\partial u}{\partial r} d\theta - \int_{C_1} u d\theta = \log(r_2) \int_{C_2} r_2 \frac{\partial u}{\partial r} d\theta - \int_{C_2} u d\theta.$$

En otras palabras, la expresión

$$\int_{|z|=r} u d\theta - \log(r) \int_{|z|=r} r \frac{\partial u}{\partial r} d\theta,$$

es constante. Por (7.3) se tiene también que

$$\int_{|z|=r} r \frac{\partial u}{\partial r} d\theta,$$

es constante en el caso de un anillo y cero si  $u$  es armónica en todo el disco. Con estos dos resultados hemos probado el siguiente teorema.

**Teorema 7.2.1.** *(Teorema del Valor Medio para funciones armónicas)*

La media aritmética de una función armónica sobre círculos concéntricos  $|z| = r$  es una función lineal de  $\log(r)$ , es decir

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} u d\theta = \alpha \log(r) + \beta,$$

y si  $u$  es armónica en todo el disco se tiene que  $\alpha = 0$ .

**Observación 7.2.1.**

Tomando  $\beta = u(0)$ , por continuidad y trasladando el origen se tiene

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \quad (7.5)$$

Además si  $u$  es armónica, entonces se tiene que  $\beta = u(0)$ .

**Teorema 7.2.2.** *(Principio del máximo y mínimo)*

Sea  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función armónica, entonces no alcanza máximos y mínimos en  $\Omega$ . De esta forma, en un cerrado  $E$  el máximo y el mínimo se alcanzan en la frontera de  $E$ .

**Demostración:**

La demostración es análoga a la hecha en el caso de funciones analíticas por lo que se deja propuesta al lector.

**Ejercicio 7.2.1.**

1. Si  $u$  es una función armónica y acotada en  $0 < |z| < \rho$ , entonces el origen es una singularidad removible en el sentido de que  $u$  pasa a ser armónica en  $|z| < \rho$ , cuando  $u(0)$  está bien definida.
2. Encuentre una función armónica en  $D(0, 1)$  tal que el valor de la frontera este dado por  $u(x, y) = x^2$ .
3. Encuentre una función armónica en  $D(0, 1)$  tal que el valor de la frontera este dado por  $u(x, y) = x^3$ .

**7.3. La fórmula de Poisson****Teorema 7.3.1.** (La Fórmula de Poisson)

Sea  $u(z)$  armónica en  $|z| < R$  y continua en  $|z| \leq R$ . Entonces

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} \frac{R^2 - |a|^2}{|z - a|^2} u(z) d\theta, \quad (7.6)$$

para todo  $|a| < R$ .

**Demostración:**

Supongamos que  $u(z)$  es armónica en el disco cerrado  $|z| \leq R$ . La transformación de Moebius

$$z = S(\zeta) = \frac{R(R\zeta + a)}{R + a\zeta},$$

envia  $|\zeta| \leq 1$  a  $|z| \leq R$  y manda  $\zeta = 0$  a  $z = a$ . La función  $u(S(\zeta))$  es armónica en  $|\zeta| \leq 1$  y por (7.5) obtenemos que

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} u(S(\zeta)) d \arg \zeta. \quad (7.7)$$

Dado que

$$\zeta = \frac{R(z - a)}{R^2 - \bar{a}z},$$

entonces

$$d \arg \zeta = -i \frac{d\zeta}{\zeta} = -i \left( \frac{1}{z - a} + \frac{\bar{a}}{R^2 - \bar{a}z} \right) dz = \left( \frac{z}{z - a} + \frac{\bar{a}z}{R^2 - \bar{a}z} \right) d\theta.$$

Escribiendo  $R^2 = z\bar{z}$  la última expresión puede ser reescrita como

$$\frac{z}{z-a} + \frac{\bar{a}}{\bar{z}-\bar{a}} = \frac{R^2 - |a|^2}{|z-a|^2},$$

y por (7.7) obtenemos

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} \frac{R^2 - |a|^2}{|z-a|^2} u(z) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} \operatorname{Re} \frac{z+a}{z-a} u(z) d\theta. \quad (7.8)$$

lo cual concluye la demostración, en el caso de que  $u(z)$  es armónica en el disco cerrado. Veamos ahora el caso que es armónica en el disco abierto y continua en el disco cerrado. Sea  $0 < r < 1$ , entonces  $u(rz)$  es armónica en el disco cerrado y obtenemos

$$u(ra) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} \frac{R^2 - |a|^2}{|z-a|^2} u(rz) d\theta.$$

Como  $u(z)$  es uniformemente continua en  $|z| \leq R$ , tomando  $r$  tendiendo a 1, se obtiene que  $u(rz) \rightarrow u(z)$  uniformemente en  $|z| = R$ , lo que finaliza la demostración.  $\square$

### Observación 7.3.1.

En polares la fórmula (7.6) se puede expresar como

$$u(re^{i\phi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2} u(Re^{i\theta}) d\theta.$$

### Observación 7.3.2.

Un caso particular de (7.6) es tomando  $u = 1$  lo que nos indica que

$$\int_{|z|=R} \frac{R^2 - |z|^2}{|z-a|^2} d\theta = 2\pi.$$

Notemos que el teorema anterior nos da una fórmula explícita para la conjugada de  $u$ , en efecto, la fórmula (7.8) nos entrega

$$u(z) = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} u(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \right].$$

Dado el Teorema de Morera, la expresión dentro del paréntesis es una función analítica para  $|z| < R$ , luego  $u(z)$  es la parte real de

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} u(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + iC, \quad (7.9)$$

donde  $C$  es una constante real arbitraria. La fórmula (7.9) es conocida como la fórmula de Schwarz.

## 7.4. El Teorema de Schwarz

### Definición 7.4.1.

Sea  $U(\theta)$  con  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  una función continua por pedazos, definimos la integral de Poisson de  $U$  como

$$P_U(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} U(\theta) d\theta.$$

**Ejercicio 7.4.1.** Pruebe que  $P_U(z)$  satisface

(i)  $P_{U+V} = P_U + P_V$ .

(ii)  $P_{cU} = cP_U$  para toda constante  $c$ .

(iii) Si  $U \geq 0$  entonces  $P_U \geq 0$ .

(iv) Si  $m \leq U \leq M$  entonces  $m \leq P_U \leq M$ . *Hint: Demuestre primero que  $P_c = c$  para toda constante  $c$ .*

### Teorema 7.4.1.

La función  $P_U(z)$  es armónica para  $|z| < 1$  y si  $U$  es continua en  $\theta_0$  se tiene

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta_0}} P_U(z) = U(\theta_0). \quad (7.10)$$

#### Demostación:

Usando la demostración anterior es fácil ver que  $P_U(z)$  es armónica, ahora para estudiar el comportamiento en la frontera, sean  $C_1$  y  $C_2$  arcos complementarios del círculo unitario y denotemos por  $U_1$  la función que coincide con  $U$  en  $C_1$  y que vale cero en  $C_2$ . Análogamente denotemos por  $U_2$  a la función que vale  $U$  en  $C_2$  y cero en  $C_1$ . Claramente  $P_U = P_{U_1+U_2}$ .

Dado que  $P_{U_1}$  puede ser escrita como una integral de línea sobre  $C_1$ , se tiene que es armónica en todas partes salvo en el arco cerrado  $C_1$ . La expresión

$$\operatorname{Re} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} = \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2},$$

es nula en  $|z| = 1$  para  $z \neq e^{i\theta}$ .  $P_{U_1}$  es cero en el arco abierto  $C_2$ , y dado que es continua  $P_{U_1} \rightarrow 0$  cuando  $z \rightarrow e^{i\theta} \in C_2$ .

Para probar (7.10) supongamos sin pérdida de generalidad que  $U(\theta_0) = 0$ , pues si no basta reemplazar  $U$  por  $U - U(\theta_0)$ . Dado  $\varepsilon > 0$  podemos encontrar  $C_1$  y  $C_2$  tales que  $e^{i\theta_0}$  es un punto interior de  $C_2$  y  $|U(\theta_0)| < \varepsilon/2$  para  $e^{i\theta} \in C_2$ . Bajo esta condición  $|U_2(\theta)| < \varepsilon/2$  para todo  $\theta$ , luego  $|P_{U_2}(z)| < \varepsilon/2$  para todo  $|z| < 1$ . Por otro lado, dado que  $U_1$  es continua y se anula en  $e^{i\theta_0}$  existe  $\delta$  tal que  $|P_{U_1}(z)| < \varepsilon/2$  para  $|z - e^{i\theta_0}| < \delta$ . Concluimos que  $|P_U(z)| \leq |P_{U_1}| + |P_{U_2}| < \varepsilon$  cuando  $|z| < 1$  y  $|z - e^{i\theta_0}| < \delta$ .  $\square$

**Ejercicio 7.4.2.**

1. Pruebe que una función que es armónica y acotada en el semiplano superior, continua en el eje real, puede ser representada como una integral de Poisson.
2. Si  $f(z)$  es analítica en todo el plano y si  $z^{-1} \operatorname{Re}(f(z)) \rightarrow 0$  cuando  $z \rightarrow \infty$ , entonces  $f$  es constante. *Hint:* Use (7.9)
3. Si  $u(z)$  es armónica para  $0 < |z| < \rho$  y  $\lim_{z \rightarrow 0} z(u(z)) = 0$ , entonces  $u$  puede ser escrita de la forma  $u(z) = \alpha \log |z| + u_0(z)$ , donde  $\alpha$  es constante y  $u_0$  es una función armónica en  $|z| < \rho$ .

**7.5. Principio de reflexión de Schwarz****Teorema 7.5.1.**

Sea  $\Omega$  una región y denotemos por  $\Omega^+ = \Omega \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ ,  $\Omega^- = \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} \in \Omega^+\}$  y a  $\sigma$  la parte del eje real en  $\Omega$ . Supongamos que  $v(x)$  es continua en  $\Omega^+ \cup \sigma$ , armónica en  $\Omega^+$  y nula en  $\sigma$ . Entonces  $v$  tiene una extensión armónica en  $\Omega^+ \cup \sigma \cup \Omega^-$  que satisface la relación de simetría  $v(\bar{z}) = -v(z)$ . Bajo las mismas condiciones, si  $v$  es la parte imaginaria de una función analítica  $f(z)$  en  $\Omega^+$ , entonces  $f(z)$  tiene una extensión analítica que satisface  $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$ .

**Demostración:**

Sea  $V(z)$  la función que es igual a  $v(z)$  en  $\Omega^+$ , 0 en  $\sigma$  y  $-v(\bar{z})$  en  $\Omega^-$ . Debemos probar que  $V(z)$  es armónica en  $\sigma$ , pues es claro que  $-v(\bar{z})$  es armónica en  $\Omega^-$ . Para un punto  $x_0 \in \sigma$  consideremos el disco centrado en  $x_0$  contenido en  $\Omega$  (denotado por  $D(x_0, r)$ ) y sea  $P_V$  la integral de Poisson con respecto a este disco, formada por los valores de frontera de  $V$ . La diferencia  $V - P_V$  es armónica en la mitad superior del disco y se anula en el semicírculo por el Teorema 7.4.1. Como  $v$  tiende a cero en  $\sigma$  y  $P_V$  se anula por simetría, entonces  $V - P_V$  también se anula en el diámetro. Por el Teorema 7.2.2 lo anterior implica que  $V = P_V$  en la mitad superior del disco y el mismo desarrollo se hace para probar la igualdad en la mitad inferior. Así concluimos que  $V$  es armónica en todo el disco y en particular en  $x_0$ .

Para probar el resto del teorema, consideremos un disco con centro en  $\sigma$ . Queremos que

$$f = u_0 + iv,$$

defina una función analítica con  $u_0 \in D(x_0, r)$ . Ya hemos extendido  $v$  a todo el disco, y  $v$  es la conjugada armónica de  $-u_0$  en el mismo disco, la cual podemos elegir para que  $u_0 = \operatorname{Re} f(z)$  en la parte superior del disco. Basta probar que  $u_0(z)$  pertenece a  $\sigma \cap D(x_0, r)$ . Consideremos  $U_0(z) = u_0(z) - u_0(\bar{z})$ , la cual en el eje real cumple que  $\partial U_0 / \partial x = 0$  y además

$$\frac{\partial U_0}{\partial y} = 2 \frac{\partial u_0}{\partial y} = -2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Se sigue que la función analítica  $\partial U_0/\partial x - i\partial U_0/\partial y$  se anula en el eje real y por ende es nula. De esta forma  $U_0$  es constante, y la constante es evidentemente igual a cero, con lo cual hemos probado que  $u_0(z) = u_0(\bar{z})$ .

La construcción puede ser repetida para discos arbitrarios, por lo que se concluye el teorema.  $\square$

**Ejercicio 7.5.1.**

1. *Muestre que toda función que es analítica en una región simétrica  $\Omega$  puede ser escrita de la forma  $f_1 + if_2$ , donde  $f_1, f_2$  son analíticas en  $\Omega$  y reales en el eje real.*
2. *Si  $f(z)$  es analítica en  $|z| \leq 1$  y satisface  $|f| = 1$  cuando  $|z| = 1$ , entonces  $f(z)$  es racional.*

# Capítulo 8

## Teorema de Riemann

### 8.1. El Teorema de Riemann

**Teorema 8.1.1.** (*El Teorema de Riemann*)

Sean  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  dos dominios simplemente conexos en  $\mathbb{C}$ ,  $\Omega_1 \neq \mathbb{C}$ ,  $\Omega_2 \neq \mathbb{C}$ . Sean  $z_1 \in \Omega_1$ ,  $z_2 \in \Omega_2$ , entonces existe una única función  $\varphi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  biyectiva analítica (conforme) tal que  $\varphi(z_1) = z_2$  y  $\varphi'(z_1) > 0$ .

**Demostración:**

Basta demostrar el teorema en el caso  $\Omega_1 = \Omega \neq \mathbb{C}$  simplemente conexo, y  $\Omega_2 = D(0, 1)$ , con  $z_2 = 0$ . Fijamos  $z_0 \in \Omega$ , queremos demostrar que existe una única función  $\varphi : \Omega \rightarrow D(0, 1)$  analítica biyectiva tal que  $\varphi(z_0) = 0$ ,  $\varphi'(z_0) > 0$ .

Veamos que la función  $\varphi$  es única. Sean  $\varphi_1, \varphi_2 : \Omega \rightarrow D(0, 1)$  tales que  $\varphi_1(z_0) = 0$ ,  $\varphi_1'(z_0) > 0$  y  $\varphi_2(z_0) = 0$ ,  $\varphi_2'(z_0) > 0$ . La función  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$ , es biyectiva con  $(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(0) = 0$ . Por el Lema de Schwarz  $|(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(z)| \leq |z|$ . De manera análoga  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$  y  $|(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})(z)| \leq |z|$ . Por lo tanto  $|(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(z)| = |z|$  y  $|(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})(z)| = |z|$ , y así  $(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})(z) = ze^{i\theta}$ , pero como  $(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})'(0) = e^{i\theta} > 0$ , entonces  $e^{i\theta} = 1$ .

Probaremos ahora la existencia de  $\varphi$ .

Sea  $\mathcal{F} = \{f : \Omega \rightarrow D(0, 1) : f \text{ es analítica, } f \text{ es inyectiva, } f'(z_0) > 0\}$ .

Vamos a probar que  $\sup_{f \in \mathcal{F}} f'(z_0)$  se alcanza en  $\varphi \in \mathcal{F}$ , y que  $\varphi$  es la función buscada. La demostración consta de cuatro pasos:

- (a)  $F \neq \phi$ .
- (b)  $\sup_{f \in \mathcal{F}} f'(z_0) = \varphi'(z_0)$  con  $\varphi \in \mathcal{F}$ .
- (c)  $\varphi(z_0) = 0$ .
- (d)  $\varphi$  es sobreyectiva.

Demostración de (a):

Si  $\Omega^c$  contiene a  $D(w_0, r)$ , entonces la función

$$f(z) = \frac{r}{z - w_0} e^{i\theta}$$

está en  $\mathcal{F}$ .

Para el caso general, consideramos  $w_0 \in \Omega^c$ , y definimos la función  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

$$g(z) = \sqrt{\frac{z - w_0}{z_0 - w_0}} \text{ con } g(z_0) = 1,$$

la cual está bien definida pues  $\frac{z - w_0}{z_0 - w_0}$  no contiene al cero cuando  $z \in \Omega$ .

Verifiquemos ahora que existe  $\eta > 0$  tal que  $|g(z) + 1| > \eta$  para todo  $z \in \Omega$ . Si no fuera así existiría una sucesión  $z_n$  en  $\Omega$  tal que  $g(z_n) \rightarrow -1$ , con lo que  $g^2(z_n) \rightarrow 1$ , por lo que  $z_n \rightarrow z_0$ , contradiciendo el hecho de que  $g(z_0) = 1$ .

Por lo tanto podemos definir

$$f(z) = \left( \frac{\eta e^{i\theta}}{g(z) + 1} \right),$$

la cual pertenece a  $\mathcal{F}$ .

Probemos (b):

Sea  $f \in \mathcal{F}$  y  $d = \text{dist}(z_0, \Omega^c) > 0$ . Entonces

$$f'(z_0) = |f'(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, \frac{d}{2})} \frac{f(w)}{(w - z_0)^2} dw \right|, \quad (8.1)$$

con lo que

$$|f'(z_0)| \leq \frac{4}{d}, \text{ porque } |f| \leq 1.$$

Consideremos  $f_n \in F$ , tal que  $f'_n(z_0) \rightarrow \sup_{f \in F} f'(z_0)$ . Sea  $K_m$  una sucesión creciente (en el sentido de la inclusión) de compactos tal que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_m = \Omega$ , y  $z_0 \in \text{Int}(K_1)$ . Definimos  $d_1 = \text{dist}(K_1, \Omega^c)$ , procediendo como en (8.1) obtenemos  $|f'_n(w)| \leq \frac{4}{d_1}$  para todo  $w \in K_1$ . Por lo tanto tenemos una sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de funciones equicontinuas en  $K_1$ . Por Arzela-Ascoli existe una subsucesión  $f_{n_1}$  que converge uniformemente a  $\varphi_1$  en  $K_1$ . Así  $f'_{n_1} \rightarrow \sup_{f \in F} f'(z_0)$  y  $f'_{n_1}(z_0) \rightarrow \varphi'_1(z_0) > 0$ . La función es inyectiva por el Teorema (4.4.9).

Procediendo como en el paso anterior existe una subsucesión  $\{n_2\} \subset \{n_1\}$  tal que  $f_{n_2} \rightarrow \varphi_2$  uniformemente en  $K_2$ , con  $\varphi_2 = \varphi$  en  $K_1$ . Así podemos definir una subsucesión  $\{n_m\}$  tal que  $f_{n_m} \rightarrow \varphi_m$  en  $K_m$  y  $\varphi_n|_{K_i} = \varphi_i$  para todo  $i \leq n$ . Sea  $\varphi \rightarrow D(0, 1)$  dada por  $\varphi|_{K_m} = \varphi_m$ . Es claro que la subsucesión  $f_{n_m} \rightarrow \varphi$  uniformemente en compactos de  $\Omega$ . Como  $f_{n_m}$  es inyectiva y  $\varphi'(z_0) > 0$ , entonces por el Corolario (4.4.3)  $\varphi$  es inyectiva y  $|\varphi| < 1$ .

Probemos (c):

Si  $\varphi(z_0) = \alpha \neq 0$ , entonces la función

$$g(z) = \frac{\varphi(z) - \alpha}{1 - \varphi(z)\bar{\alpha}},$$

cumple que

$$g'(z_0) = \frac{\varphi'(z_0)}{1 - |\alpha|^2} > \varphi'(z_0),$$

lo cual es una contradicción, y por lo tanto  $\varphi(z_0) = 0$ .

Ahora basta probar (d):

Sea  $w \in D(0, 1)$  tal que  $\varphi(z) \neq w$  para todo  $z \in \Omega$ , con  $w = -t^2 e^{i\theta}$  para algún  $0 < t < 1$ . Sea  $\hat{\varphi} \equiv e^{-i\theta} \varphi$ , con lo que  $\hat{\varphi}(z) = -t^2$  para cualquier  $z \in \Omega$ . Definamos la función

$$f_1(z) = \frac{\hat{\varphi}(z) + t^2}{1 + t^2 \hat{\varphi}(z)},$$

la cual es distinta de cero para todo  $z \in \Omega$ , como  $\Omega$  es simplemente conexo podemos definir la función  $f_2 : \Omega \rightarrow D(0, 1)$

$$f_2(z) = \frac{\sqrt{f_1(z)} - t}{1 - t\sqrt{f_1(z)}},$$

que cumple que  $f_2(z_0) = 0$ . Es fácil ver que  $|f'_2(z_0)| > |\varphi'(z_0)|$ . Lo que es una contradicción, así  $\varphi$  es biyectiva. ■

## 8.2. Comportamiento en la Frontera

### Definición 8.2.1.

Diremos que  $\{z_n\} \subseteq \Omega$  tiende a la frontera si para todo  $z \in \Omega$  existen  $\varepsilon > 0$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que  $|z - z_n| > \varepsilon$  para cualquier  $n \geq n_0$ . De manera análoga diremos que la función continua  $z(t) \in \Omega$ , con  $t \in [0, 1)$  tiende a la frontera si para todo  $z \in \Omega$  existen  $\varepsilon > 0$ ,  $t_0 < 1$  tales que  $|z(t) - z| > \varepsilon$  para todo  $t > t_0$ .

### Proposición 8.2.1.

Sean  $\Omega, \Omega'$  dos regiones en  $\mathbb{C}$ , y  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  un homeomorfismo. Si  $\{z_n\}$  tiende a la frontera de  $\Omega$ , entonces  $\{f(z_n)\}$  tiende a la frontera de  $\Omega'$ .

### Demostración:

Sea  $w \in \Omega'$ , entonces existe  $z \in \Omega$  tal que  $f(z) = w$ . Sabemos que existen  $\varepsilon > 0$ ,  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que  $|z - z_n| > \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0$ . Tenemos que  $f(D(z, \varepsilon))$  contiene una vecindad de  $w$ , es decir, existe  $\delta > 0$  tal que  $D(w, \delta) \subset f(D(z, \varepsilon))$ . Por lo tanto si  $n \geq n_0$

$$|f(z_n) - w| > \delta.$$

■

## 8.3. Fórmula de Schwarz-Christoffel

Si bien el Teorema de Riemann sola nos da la existencia y unicidad de la función, hay un caso particular en el que existe una fórmula explícita para mandar el disco unitario en cualquier polígono, y ésta es la Fórmula de Schwarz-Christoffel. Consideremos el polígono  $\Omega$  de vértices  $\{z_k\}_{k=1}^n$  y ángulos internos correspondientes  $\{\alpha_k \pi\}_{k=1}^n$ , con  $0 < \alpha_k < 2$  para todo  $k$ .

Definamos ahora  $\beta_k := 1 - \alpha_k$ . Tenemos que si el polígono es convexo se cumple que  $\sum_{k=1}^n \beta_k = 2$ , y  $\beta_k > 0$  para todo  $k$ .

Definiendo las transformaciones  $\zeta = T_k(z) = (z - z_k)^{1/\alpha_k}$ , y sus correspondientes inversas  $T_k^{-1}(\zeta) = z_k + \zeta^{\alpha_k}$ . Sea  $f : \Omega \rightarrow D(0, 1)$  la función que nos dá el Teorema de Riemann, definimos entonces  $g(\zeta) = f \circ T_k^{-1}(\zeta) = f(z_k + \zeta^{\alpha_k})$   $g$  se puede extender analíticamente a la frontera y va a seguir siendo analítica en  $0$  y  $1 - 1$ .

Además  $g^{-1}(w) = T_k \circ f^{-1}(w) = (F(w) - z_k)^{1/\alpha_k}$  con  $F = f^{-1}$ .

$$F(w) - z_k = [g^{-1}(w)]^{\alpha_k} = (w - w_k)^{\alpha_k} G_k(w), \quad \text{con } w_k = f(z_k), G_k \neq 0,$$

así derivando

$$F'(w) = \alpha_k(w - w_k)^{\alpha_k - 1} G_k(w) + (w - w_k)^{\alpha_k} G'_k(w),$$

con ésto

$$F'(w)(w - w_k)_k^\beta = \alpha_k G_k(w) + (w - w_k)_k^\beta G'_k(w),$$

va a ser una función analítica que no se va a anular en un entorno de  $w_k$ .

Definamos entonces la siguiente función analítica y distinta de cero en  $\overline{D(0, 1)}$ ,

$$H(w) = F'(w) \prod_{k=1}^n (w - w_k)^{\beta_k}. \quad (8.2)$$

Veamos que pasa con  $H$ . Notemos que

$$\arg H(w) = \arg F'(w) + \sum_{k=1}^n \beta_k \arg (w - w_k).$$

Si denotamos  $w(t) = \varphi(z(t))$ , con  $z(t)$  una curva, entonces  $\dot{w} = \varphi'(z)\dot{z}$  y  $\arg \dot{w} = \arg \varphi'(z) + \arg \dot{z}$ . En nuestro contexto,  $\arg F'(w) = \arg dF + \arg dw$ , donde  $dF$  es la diferencia de dos puntos en la tangente a  $\delta\Omega$  en  $F(w)$ , y  $dw$  es la diferencia de dos puntos en la tangente a  $\delta D(0, 1)$  en  $w$ . Si  $w = e^{i\theta}$ ,  $dw = \theta + \pi/2$  y  $dF = \text{ctte}$  (pues depende solo de  $\theta_k$  y  $\theta_{k+1}$  y no de  $\theta$ ).

Así,

$$\arg H(w) = \text{ctte} - \theta + \sum_{k=1}^n \beta_k \arg (w - w_k).$$

Finalmente

$$w - w_k = e^{i\theta} - e^{i\theta_k} = 2ie^{\frac{i(\theta+\theta_k)}{2}} \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\theta - \theta_k),$$

luego  $\arg (w - w_k) = \frac{\pi + \theta_k}{2} + \frac{\theta}{2}$ . Así

$$\arg H(w) = a - \theta + \left( \sum_{k=1}^n \beta_k \right) \frac{\theta}{2} = a.$$

Como  $\arg H(w)$  es una función armónica no nula, por Teoremas del Módulo Máximo y Mínimo se sigue que  $\arg H(w) \equiv a$  en el disco, con lo que se sigue que  $H \equiv c$  en el disco.

Volviendo a la ecuación (8.2), se tiene que

$$F'(w) = c \prod_{k=1}^n (w - w_k)^{-\beta_k},$$

e integrando se tiene

$$F(w) = c \int_0^w \prod_{k=1}^n (\zeta - w_k)^{-\beta_k} d\zeta + F(0). \quad (8.3)$$

Así se tiene que (8.3) corresponde a la función de Riemann que manda el disco en el polígono  $\Omega$  y se llama Fórmula de Schwarz-Christoffel.

# Bibliografía

- [1] L. Ahlfors, Complex Analysis, Third Edition, Mc. Graw-Hill Inc., 1979.
- [2] J. Bak and D. Newman, Complex Analysis, Second Edition, Springer-Verlag, 1997.
- [3] J. Conway, Functions of One Complex Variable I, Second Edition, Springer-Verlag, 1978.
- [4] A. I. Markushevich, Theory of Functions of a Complex Variable, Chelsea Publishing Company, 1977.