

3.- a)

$$f(x) = \frac{1}{b}, \quad 0 < x < \theta + a$$

Integrando la función densidad para sacar b

$$\int_0^{\theta+a} \frac{1}{b} dx = \frac{x}{b} \Big|_0^{\theta+a} = \frac{(\theta+a)}{b} = 1 \Rightarrow b = (\theta+a)$$

Con esto se calcula la esperanza:

$$E(x) = \int_0^{\theta+a} \frac{x}{b} dx = \frac{x^2}{2b} \Big|_0^{\theta+a} = \frac{(\theta+a)^2}{2(\theta+a)} = \frac{(\theta+a)}{2}$$

Ahora la varianza usando

$$V(x) = E(x^2) - E(x)^2$$

Calculemos el primer término del lado derecho:

$$E(x^2) = \int_0^{\theta+a} \frac{x^2}{b} dx = \frac{x^3}{3b} \Big|_0^{\theta+a} = \frac{(\theta+a)^3}{3(\theta+a)} = \frac{(\theta+a)^2}{3}$$

Ahora sí la varianza:

$$V(x) = \frac{(\theta+a)^2}{3} - \frac{(\theta+a)^2}{4} = \frac{(\theta+a)^2}{12}$$

b)

$$\mu_1 = m_1 \Rightarrow E(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \Rightarrow \frac{(\theta+a)}{2} = \bar{x} \Rightarrow \hat{\theta} = 2\bar{x} - a$$

Veamos si es consistente

$$E(\hat{\theta}) = 2E(\bar{x}) - a = 2 \frac{(\theta+a)}{2} - a = \theta$$

Y por otro lado:

$$V(\hat{\theta}) = 4V(\bar{x}) = \frac{4}{n^2} \sum V(x_i) = \frac{4n}{n^2} V(x_i) = \frac{4(\theta+a)^2}{12n} \longrightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

Luego es consistente.

c)

La verosimilitud queda:

$$L(\theta) = \frac{1}{(\theta + a)^n}$$

Luego maximizando esta función se tiene que:

$$Max(L(\theta)) \iff (\theta + a)^n \text{ es } Minimo$$

Pero se tiene que

$$0 < x < (\theta + a) \Rightarrow Max\{x_i\} < (\theta + a) \Rightarrow \theta > Max\{x_i\} - a$$

Luego el mínimo valor para  $(\theta + a)^n$  se alcanza cuando  $\theta$  es *Minimo* y esto de acuerdo a lo anterior es cuando  $\theta = Max\{x_i\} - a$ . Luego el estimador queda:

$$\hat{\theta} = Max\{x_i\} - a$$

Y las restricciones son sobre la función de verosimilitud en donde

$$\theta \neq a$$

Y es único pues el  $Max\{x_i\}$  es único dado la muestra.