MA34B-**Estadística**
Profesora: Nancy Lacourly
Auxiliares: Félix Carrasco - Claudio Pareja
Guía de Ejercicios I

1. Sea una muestra aleatoria simple $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de una distribución exponencial de parámetro θ con densidad $f(x) = \frac{1}{\theta}\; exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)\; \forall x \geq 0$.

   a) Encuentre el estimador de Máxima Verosimilitud $\hat{\theta}$ de θ.

   b) Deduzca el estimador de Máxima Verosimilitud $\hat{\beta}$ de $e^{-\lambda\theta}$ donde $\lambda > 0$

   c) Calcule la esperanza y la varianza de $\hat{\beta}$ (se recomienda usar la función generatriz de los momentos de X).

   d) Se considera una distribución de Poisson de parámetro λ, ie, $\mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, en particular $\mathbb{E}(X)=\mathbb{V}(X)=\lambda$, y una distribución a priori para λ correspondiente a $Gamma(2,5)$, ie, $g(\lambda) = \frac{\lambda^{r-1}e^{-\lambda/s}}{s^r\Gamma(r)}$ $\lambda > 0$ con $r = 2$ y $s = 5$, recuerde que con esta distribución tenemos $\mathbb{E}(\lambda) = rs$ y $\mathbb{V}(\lambda) = rs^2$. Encuentre el estimador de Bayes de λ para una función de perdida cuadrática. ¿Es asintoticamente insesgado?¿Es consistente?

2. Sea una muestra aleatoria simple $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de una v.a. X de distribución con densidad: $f(x \mid \beta) = \begin{cases} \frac{\beta a^\beta}{x^{\beta+1}} & x \geq a \\ 0 & x < a \end{cases}$ con $a > 0$.

   a) Muestre que $Y = log\left(\frac{X}{a}\right)$ sigue una distribución exponencial $g(y \mid \beta) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$

   b) Deducir el estimador $\hat{\alpha}$ de máxima verosimilitud de $\alpha = \beta^{-1}$, suponiendo a conocido.

   c) Calcula la esperanza y la varianza de $\hat{\alpha}$.

   d) Dé el estimador de máxima verosimilitud de β. Justifique.

   e) Muestre que el estimador $\hat{\alpha}$ es de mínima varianza entre todos los estimadores insesgados de α.

3. Se consideran dos variables normales, $X \sim N(2\mu, \sigma^2)$ e $Y \sim N(\mu, 2\sigma^2)$. Se tiene dos muestras independientes: una muestra aleatoria $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de X y una muestra aleatoria simple $y_1, y_2, \ldots, y_m$ de Y. Se consideran todos los estimadores de μ de la forma $\hat{\mu} = \sum_{i=1}^n a_i X_i + \sum_{j=1}^m b_j Y_j$.

   a) Determine una condición sobre los coeficientes a_i y b_i para que el estimador $\hat{\mu}$ de μ sea insesgado.

   b) Determine los coeficientes a_i y b_i para que el estimador $\hat{\mu}$ de μ sea insesgado y de varianza mínima. Deduzca la expresión de $\hat{\mu}$.

   c) Use la desigualdad de Cramer-Rao para verificar si el estimador $\hat{\mu}$ de la parte anterior es de mínima varianza entre TODOS los estimadores insesgados de μ.

4. Para las próximas elecciones municipales, un alcalde debe decidir si postular o no a su reelección. Sea p la proporción de votantes que votaría por él. Suponga que el alcalde contrata a un consultor para que estime p a partir de una encuesta. El consultor observa que de un total de n encuestados, un número z votará por el alcalde. El alcalde lo contrató a ud. como experto en estadística para que le ayude a tomar una decisión respecto de su postulación.

a) Suponga que ud. conoce toda la información de la muestra; es decir, que observa las respuesta x_i entregada por cada uno de los encuestados. Demuestre que el estimador de máxima verosimilitud para p está dado por: $\hat{p}_{mv} = \frac{x}{n}$.

b) Verifique si el estimador $\hat{p}_{mv}$ es consistente.

c) Verifique si la varianza $\hat{p}_{mv}$ alcanza la varianza mínima para los estimadores insesgados.

d) Suponga ahora que, dada su experiencia en elecciones anteriores, el alcalde le comunica que cree que el parámetro p se distribuye a priori según una distribución $Beta(1,2)$. si la función de pérdida es cuadrática, determine el estimador $\hat{\beta}_b$ de Bayes. **Hint:** Puede serle útil saber que $\int_0^1 y^n(1-y)^m dy = \frac{n!m!}{(1+n+m)!}$

e) Calcule los errores cuadráticos medios de los estimadores $\hat{p}_{mv}$ y $\hat{\beta}_b$.

f) Determine para qué tamaños muestrales n se tiene que $\mathbb{E}[(\hat{p}_{mv} - p)^2] < \mathbb{E}[(\hat{\beta}_b - p)^2]$.

5. Se considera n valores muestrales $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ en donde los x_i siguen una distribución $N(\mu, \sigma^2)$ y son mutuamente independientes.

   a) Dé las distribuciones de $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ y de $W^2 = \frac{(\overline{x}-\mu)^2}{\sigma^2/n}$.

   b) Sean $U^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}$ y $T^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\overline{x})^2}{\sigma^2}$. Muestre que $U^2 = T^2 + W^2$.

   c) Dé el valor de $\hat{\sigma} = \sqrt{\mathbb{V}(\overline{x})}$ cuando $\sigma^2 = 9$ y $n = 100$; y cuando $\sigma^2 = 9,\ n = 500$.

   d) ¿Cuál es el valor de n cuando $\hat{\sigma} = 0{,}10$?

   e) Cuando $\sigma^2 = 9,\ \mu = 2$ y $n = 100$, dé el valor u tal que $\mathbb{P}(\mu - u \leq \overline{x} \leq \mu + u) = 0{,}95$

   f) Cuando $\sigma^2 = 9,\ \mu = 2$, dé el valor del tamaño n de la muestra para que $\mathbb{P}(1{,}6 \leq \overline{x} \leq 2{,}4) = 0{,}95$.

   g) Cuando $\sigma^2 = 9,\ \mu = 2$ y $n = 100$ de el valor de u tal que $\mathbb{P}(\mu - u \leq U^2 \leq \mu + u) = 0{,}95$.

6. Se consideran n datos de temperaturas independientes $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ en grados Celsius con $x_i \in \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Sunpodremos que n es impar. Se definen las frecuencias absolutas $f_i = \#\{x_k = a_i\}\ i = 1, 2, \ldots, q$, la mediana $M_a = x_{(n+1)/2}$ cuando los valores se ordenan y la moda como el valor más frecuente, ie, $M_o = \{a_k \mid f_k = max_i\{f_i\}\}$.

   a) Muestre que la media $\overline{x}$ minimiza $v(c) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2$.

   b) Muestre que la mediana M_a minimiza $h(c) = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i - c \mid$.

   Hint $\sum_{i=1}^{n} \mid x_i - c \mid = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i - c)^2}$

   c) Si pasamos de grados Celsius a Fahrenheit ($y = 1{,}8x + 32$).¿Cómo se transforman la media, la mediana y la moda?. En general, ¿que ocurre con ella si usamos una transformación del tipo $y = ax + b$ con a, b constantes dadas?. Además, ¿que ocurre con la media geométrica? $\hat{x}_g = (\Pi_i x_i)^{1/2}$.

   d) Se consideran los valores $y_i = ax_i + b$ y tomamos $F_n(x) = \frac{\#x_i \leq x}{n}$ la función empírica de los x_i y F la función de la problación. Exprese la función de distribución empírica $G_n(y) = \frac{\#y_i \leq y}{n}$ en función de F_n. Deduzca la distribución G para la "población" y.

7. Una fábria estudia la calidad de sus productos que son apolletas de 100W. El investigador del estudio se interesa en conocer la distribución de la duración de vida de las ampolletas para lo cual utilizará una muestra aleatoria simpre de tamaño n. Llamamos X a la variable duración de vida de las ampolletas en horas y se supone que la población es infinita.

   a) Justifique porque el investigador utiliza un muestra y no un censo para el estudio.

   b) El investigador suponque que la variable poblacional X sigue una distribución $N(\mu, \sigma^2)$ ¿Cuál es la expresión de la varianza de la media de las distribuciones de vida de las n apolletas de la muestra en función de la varianza poblacional σ^2?

   c) El investigador supone ahora que la variable poblacional X sigue una distribución exponencial $Exp(\lambda)$ ¿Cuál es la expresión de la varianza de la media de las duraciones de vida de las n ampolletas de la muestra, en función de λ?

   d) El investigador encontró una media de 1.000 $[horas]$ y una varianza de 800.000 $[horas^2]$ en la muestra que sacó. ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra si el investigador no quiere una varianza de la media muestra mayor que 1.000 $[horas^2]$? Suponga primero una distribución normal y luego una exponencial.

   e) Si consideramos ahora una distribución $N(1{,}200, 1{,}000{,}000)$, ¿cuál es la probabilidad de encontrar una media muestral a lo más de 1000 $[horas]$ en una muestra de tamaño $n = 100$ y en una muestra de tamaño $n = 500$?(Puede serle útil $\sqrt{5} \approx 2{,}2361$)

   f) Se supone ahora la población de ampolletas finita con cardinalidad $N = 1{,}000$. ¿Cómo se compara la varianza y media muestral en este caso, con las del caso infinito?.

8. Suponga que $\{X_1, \ldots, X_n\}$ consituyen una m.a. de una distribución normal con media μ y varianza σ^2 ambas desconocidos. Sean S_0^2 y S_1^2 los estimadores de σ^2 definidos por:

$$S_0^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \hat{X})^2}{n} \qquad S_1^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \hat{X})^2}{n-1}$$

   a) Verifique si son insesgados.

   b) Demuestre que el E.C.M. de S_0^2 es menor que el de S_1^2 para todos los posibles valores de μ y σ^2.

   c) Demuestre que el E.C.M. de $T_0^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \hat{X})^2}{n+1}$ es menor que el de S_0^2 y S_1^2, para todos los posibles valores de μ y σ^2. (**Hint**: Minimice $T(c) = c\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{X})^2$).

9. Suponga que $\{X_1, \ldots, X_n\}$ consituyen una m.a. de una distribución normal con media μ desconocida y varianza σ^2 conocida.

   a) Determinar la información de Fisher $I_n(\mu)$ de la muestra.

   b) ¿La media muestral tiene mínima varianza como estimador de μ?.

10. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d con distribución $Unif(0, \theta)$. Sean c y d dos constantes positivas y considere los estimadores de θ, $\hat{\theta}_c = c\bar{X}$ y $\tilde{\theta}_d = dX_{(n)}$, donde $X_{(n)} = max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$:

   a) Calcule los errores cuadráticos medios de $\hat{\theta}_c$ y $\tilde{\theta}_d$ en función de c, d y θ.

   b) Encuentre los valores de c y d que minimizan los errores cuadráticos medios.

11. La distribucion de Pareto ha sido muy utilizada en economía, dado que su función densidad presenta una "cola pesada" (es decir, decae lentamente a cero). Su función densidad está dada por:

$$f(x) = \theta x_0^{\theta} x^{-\theta-1}, x \geq x_0, \theta \geq 1, x_0 \text{ constante conocida}$$

   a) Identifique el estadístico suficiente para θ.
   b) Demuestre que el Estadístico de Máxima Verosimilitud (E.M.V.) de θ es funcion del estadístico suficiente. Obtenga la varianza asintótica del E.M.V. de θ.

12. Sea una variable aleatoria X de función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{a^r \Gamma(r)} exp(-\frac{x}{a}) x^{r-1} \text{ si } x > 0$$

en donde $a > 0$ es desconocido, $r > 0$ es dado, y

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-x} dx \qquad \Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$$

La función generatriz de momentos de X es igual a: $\mathbb{E}(e^{tX}) = \psi(t) = \left(\frac{1}{1-ta}\right)^r$, para $ta < 1$.

   a) Se extrae al azar una muestra de tamaño m. Dé el estimador de máxima verosimilitud $\hat{a}_m$ de a.
   b) Se extrae al azar una segunda muestra de tamaño n, lo que permite tener una muestra total de tamaño $m + n$. Utilizando los resultados precedentes, dar el nuevo estimador de máxima verosimilitud $\hat{a}_{m+n}$ de a. Dé la esperanza y varianza de $\hat{a}_{m+n}$.(**Hint:** use la función $\psi(t)$).
   c) Se considera otro estimador $\hat{a}_0$ obtenido como promedio del estimador $\hat{a}_m$ y $\hat{a}_n$ de a para la primera y segunda muestra, respectivamente, esto es $\hat{a}_0 = \frac{\hat{a}_m + \hat{a}_n}{2}$. Calcule la esperanza y la varianza de $\hat{a_0}$.
   d) Compare las varianzas de los dos estimadores $\hat{a}_{m+n}$ y $\hat{a}_0$. Concluya.

13. Una flota de taxis esta numerado de 1 a N. Ud. toma ala azar tres vehículos de la flota y registra el número de éste. Los datos son: 3, 12, 21. En base a esta información determine el estimador de momentos de N.

14. Tres dispositivos electrónicos iguales son puestos en serie de un sistema. El sistema se hace funcionar y a las 10 horas falla. Suponga que los tiempos de vida de los dispositivos t_i, $i = 1, 2, 3$ son independientes y $t_i \sim exp(\lambda)$, $i = 1, 2, 3$. Con base a esta información, obtenga el E.M.V. de la probabilidad de que el sistema funcione por mas de T horas, con $T > 0$ dado.