

Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor Cátedra : Fernando Lema
Profesores Auxiliares : Constanza Paredes
: Eduardo Zamora

PAUTA EXAMEN

1. a) Sea X_i = peso del pasajero i ésimo, de forma que para $i = 1, \dots, 40$ tenemos hombres, para $i = 41, \dots, 59$ son mujeres y con $i = 60$ tenemos el peso del pasajero nn.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{mujer}|\text{naufragio}) &= \mathbb{P}(\text{naufragio}|\text{mujer}) \frac{\mathbb{P}(\text{mujer})}{\mathbb{P}(\text{naufragio})} \\ \mathbb{P}(\text{mujer}) &= \frac{2}{3} \\ \mathbb{P}(\text{naufragio}|\text{mujer}) &= \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{60} X_i > 4400) = \mathbb{P}(V > 4400)\end{aligned}$$

La v.a. V es una suma de 40 normales de media 80 y d.e. 4 y de veinte normales de media 60 y d.e. 40, por lo tanto $V \rightarrow N(80 \cdot 40 + 60 \cdot 20; 60 \cdot 4) \Rightarrow V \rightarrow N(4400; 240)$

$$\begin{aligned}\text{De esta forma: } \mathbb{P}(\text{naufragio}|\text{mujer}) &= \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(\text{naufragio}) &= \mathbb{P}(\text{naufragio}|\text{mujer}) \cdot \mathbb{P}(\text{mujer}) + \mathbb{P}(\text{naufragio}|\text{hombre}) \cdot \mathbb{P}(\text{hombre}) \\ \mathbb{P}(\text{naufragio}|\text{hombre}) &= \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{60} X_i > 4400) = \mathbb{P}(Y > 4400)\end{aligned}$$

La v.a. Y es una suma de 41 normales de media 80 y d.e. 4 y de 19 normales de media 60 y d.e. 40, por lo tanto $Z \rightarrow N(80 \cdot 41 + 60 \cdot 19; 60 \cdot 4) \Rightarrow Z \rightarrow N(4420; 240)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y > 4400) &= \mathbb{P}(V > \frac{-20}{\sqrt{240}}) \text{ con } V \rightarrow N(0, 1) \\ \mathbb{P}(V > \frac{-20}{4\sqrt{15}}) &= 1 - \mathbb{P}(V < 1,29) = 1 - \mathbb{P}(V > 1,29) = 1 - 0,0985 = 0,9015\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{naufragio}) &= \frac{1}{3} \cdot 0,9015 + \frac{2}{3} \cdot 0,5 = 0,633833 \\ \text{Finalmente } \mathbb{P}(\text{mujer}|\text{naufragio}) &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{0,633833} = 0,829715\end{aligned}$$

- b) Se entiende que $X_i \rightarrow U(-0,5; 0,5)$. Si X es la suma de los X_i , entonces su esperanza es 0 y su varianza es $100 \cdot \frac{1}{12}$

Aplicando el T.C.L. $X \rightarrow N(0, \frac{25}{3})$

La probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X| < 2) &= \mathbb{P}(-2 < X < 2) = \mathbb{P}(\frac{-2 \cdot \sqrt{3}}{5} < X < \frac{22 \cdot \sqrt{3}}{5}) = \mathbb{P}(-0,69282 < X < 0,69282) \\ &= 1 - 2\mathbb{P}(X > 0,69282) = 1 - 2 \cdot 0,2451 = 0,5098\end{aligned}$$

$$2. \mathbb{E}(D) = \mathbb{E}_R(\mathbb{E}(D|R)).$$

La fn. densidad de X,Y es $\frac{1}{\pi R^2}$ ya que es uniformemente distribuido.

$$\mathbb{E}(D|R) = \int \int \frac{1}{\pi R^2} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

Los limites de la integral corresponden a un círculo de radio R.

Por facilidad se cambia a coordenadas polares y queda:

$$\mathbb{E}(D|R) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^2 d\rho d\theta = \frac{2R}{3}$$

$$\text{Finalmente } \mathbb{E}_R(\mathbb{E}(D|R)) = \mathbb{E}_R\left(\frac{2R}{3}\right) = \frac{2}{3} \mathbb{E}_R(R) = \frac{2}{3}$$

d) Para determinar k se integra la fn. en los límites y se iguala a 1.

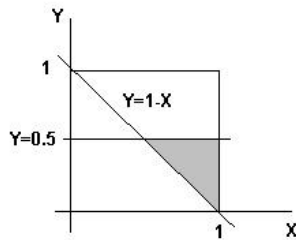
$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 k e^{-x} dx dy &= 1 \\ k \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{e}\right) dy &= 1 \\ k \left(1 - \frac{1}{e}\right) &= 1 \\ k &= \frac{e}{e-1} \end{aligned}$$

Para determinar la independencia obtenemos las marginales y se tiene que $Y \rightarrow U(0,1)$, en tanto que $f_x(x) = f_{x,y}(x,y)$. De esta forma se obtiene $f_{x|y}(x) = f_x(x)$ $f_{y|x}(x) = f_y(y)$, es decir, son variables independientes.

$$2) \mathbb{P}(X + Y > 1 | Y < 0,5) = \frac{\mathbb{P}(X+Y > 1, Y < 0,5)}{\mathbb{P}(Y < 0,5)}$$

$$\mathbb{P}(Y < 0,5) = \frac{1}{2}$$

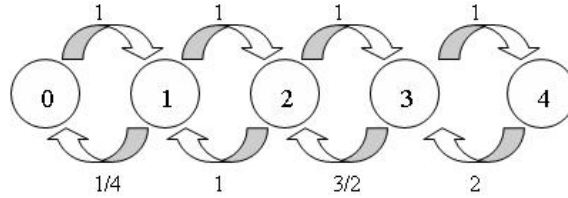
$\mathbb{P}(X + Y > 1 | Y < 0,5)$ La región es la siguiente:



Integrando la densidad en esa área se obtiene: $\mathbb{P}(X + Y > 1 | Y < 0,5) = \frac{1}{2(e-1)} \cdot (2\sqrt{e} - 3)$

Finalmente la probabilidad pedida queda: $\mathbb{P}(X + Y > 1 | Y < 0,5) = \frac{1}{(e-1)} \cdot (2\sqrt{e} - 3) \approx 0,173105$

3. a) Es claro que para un operador las tasas de muerte son *fraci*4 y para los estados con dos o más juguetes esa tasa se multiplica por dos pues los dos matan a la vez. Sea $X(t)$ =Número de juguetes en la unidad en el instante t . El diagrama de estados del proceso es:



Se trata claramente de un proceso de nacimiento y muerte. Las probabilidades estacionarias se obtienen de la frmula conocida (pitatotia) y son iguales a :

$$\Pi_1 = 4 \cdot \Pi_0 \quad \Pi_2 = 4 \cdot \Pi_1 \quad \Pi_3 = \frac{8}{3} \cdot \Pi_2 \quad \Pi_4 = \frac{4}{3} \cdot \Pi_3$$

Imponiendo que las probabilidades sumen 1 se obtiene:

$$\Pi_0 = \frac{1}{13} \quad \Pi_1 = \frac{4}{13} \quad \Pi_2 = \frac{4}{13} \quad \Pi_3 = \frac{8}{39} \quad \Pi_4 = \frac{4}{39}$$

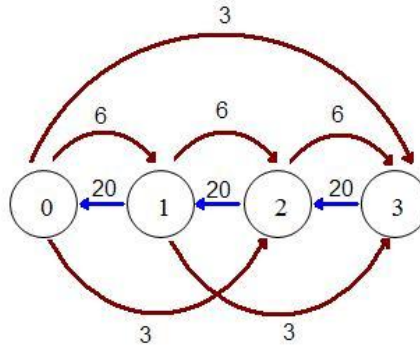
$$\text{Tiempo Total} = \omega_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}$$

$$L_q = 1 \cdot \Pi_1 + 2 \cdot \Pi_2 + 3 \cdot \Pi_3 + 4 \cdot \Pi_4 = \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 12 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 4}{39} = \frac{76}{39} = 1,94872$$

$$\text{Tasa efectiva de ingreso: } \bar{\lambda} = 1 \cdot (\Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3) = 1 \cdot (1 - \Pi_4) = \frac{35}{39}$$

Por lo tanto el tiempo promedio de un objeto en el sistema es: $\omega = \frac{L}{\bar{\lambda}} = \frac{76}{35} = 2,1712 \text{ min.}$

- b) El diagrama de estados es el siguiente:



Ecuaciones de Balance:

$$12 \cdot \Pi_0 = 20 \cdot \Pi_1$$

$$\begin{aligned}
29 \cdot \Pi_1 &= 6 \cdot \Pi_0 + 20 \cdot \Pi_2 \\
26 \cdot \Pi_2 &= 6 \cdot \Pi_1 + 20 \cdot \Pi_3 + 3 \cdot \Pi_0 \\
20 \cdot \Pi_3 &= 3 \cdot \Pi_0 + 3 \cdot \Pi_1 + 6 \cdot \Pi_2
\end{aligned}$$

En base a las probs. estacionarias Π_i , el tiempo de espera en cola es:

$$\omega_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}$$

$$\begin{aligned}
L_q &= 1 \cdot \Pi_2 + 2 \cdot \Pi_3 \\
\bar{\lambda} &= 12 \cdot \Pi_0 + 9 \cdot \Pi_1 + 3 \cdot \Pi_2
\end{aligned}$$

$$\omega_q = \frac{\Pi_2 + 2 \cdot \Pi_3}{12 \cdot \Pi_0 + 9 \cdot \Pi_1 + 3 \cdot \Pi_2}$$