Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor : Fernando Lema
Auxiliares : Constanza Paredes
Eduardo Zamora

Tarea 4 (Examen)

Entrega: Sábado 24 de Noviembre de 2007

Pregunta 1

- a) Usted ha apostado con un compañero que es capaz de asistir a más del 80% de sus clases. En caso que Ud. gane la apuesta, recibirá C [u.m.], pero en caso contrario deberá pagar M [u.m.]. Si su compañero no asiste a clases, no podrá constatar si Ud. lo hizo o no, por lo que Ud. quedará como “presente”. El período académico contempla “ n ” clases, Ud. asiste a cada clase de manera independiente con probabilidad “ p ” y su compañero también asiste a clases de manera independiente (cada día e independiente de Ud.) con probabilidad “ q ”. Encuentre una relación entre C y M para que la apuesta le convenga en promedio.
- b) Juan dice que tiene una moneda tramposa y que la probabilidad que salga cara es 0.6. Sin embargo, se sabe que Juan miente el 20% de las veces (en cuyo caso la moneda sería perfecta).
- Para comprobar lo anterior se lanza la moneda 50 veces obteniéndose 26 caras. ¿Cuál es la probabilidad que Juan esté diciendo la verdad?
 - Suponga ahora que si Juan está equivocado $IP(\text{cara}) = p \in [0,1] \setminus \{0.6\}$. Si de 50 lanzamientos 26 son cara, calcula la probabilidad que Juan esté diciendo la verdad.

Pregunta 2

La cantidad de lluvia [mm] anual en la ciudad de Santiago puede ser modelada por una distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$. Se considera un año anormal como aquel en que la lluvia caída es mayor (año lluvioso) o menor (año seco) a la media μ en 1.5 veces la desviación estándar σ .

- ¿Cuántos años deben considerarse para tener al menos uno anormal con probabilidad 0.9?
- Si el último año “anormal” es el 2007, ¿cuántos años deberían esperarse en promedio para tener el siguiente año “anormal”?
- El parámetro μ de la normal es desconocido. Determine cuántos años deben medirse para que la lluvia promedio $\bar{X}$ difiera de μ en menos de 10 [mm] con probabilidad 0.95. Considere $\sigma=30$.
- El 2007 será un año “lluvioso”. Calcule la probabilidad que el 2008 sea más lluvioso que el 2007.

Pregunta 3

Se dice que X tiene una distribución de Weibull de parámetros α, β si su densidad está dada por:

$$f_X(x) = \alpha\beta x^{\beta-1} \exp(-\alpha x^\beta) \quad x > 0 \quad \alpha, \beta > 0$$

- Muestre que $IE(X) = k_1 * \Gamma(k_2)$ y determine las constantes k_1, k_2 .
- Calcule $IP(\sum_{i=1}^{20} X_i^2 > 12)$ si X_i es una sucesión de v.a.'s independientes con distribución Weibull de parámetros $\alpha=2, \beta=2$. HINT: Determine primero la densidad de X^2 .

Pregunta 4

- Sea (X, Y) un vector aleatorio tal que:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & 0 < x < y \\ 0 & \square \end{cases}$$

Calcule $IP(X > 2 | Y < 4)$ y $IE(X | Y)$. ¿Son X e Y independientes?

- Sean $X \rightarrow \exp(1), Y \rightarrow \exp(1)$ v.a.'s independientes. Calcule $IP(X > Y > 2)$ y determine la densidad de $Z = X/Y$.

Pregunta 5

- Sean X, Y v.a.'s independientes, ambas normales de media 0 y varianza 1. Determine la densidad de $Z = X/Y$.
- Sean $U_1, U_2 \rightarrow U[0,1]$ v.a.'s independientes. Considere las variables:
 $X = \sqrt{-2 \log U_1} \cos(2\pi U_2) \quad Y = \sqrt{-2 \log U_1} \sin(2\pi U_2)$
Muestre usando TCV que $X, Y \rightarrow N(0,1)$ independientes.

Pregunta 6

El auto solar "Solarium" se alista para competir en una carrera de 3600 [km]. La distancia que este puede recorrer el día i -ésimo es $X_i = \sqrt{10R_i}$, donde la radiación solar el día i , R_i , es una v.a. uniforme en el intervalo [1000, 2000].

- Determine la función densidad de X_i , y calcule $IE(X_i), \text{Var}(X_i)$.
- Si el plazo para terminar la carrera son 30 días, calcule la probabilidad que el Solarium llegue a la meta dentro del plazo fijado. ¿Cuántos días necesita para asegurarse de llegar a la meta con al menos 95% de seguridad?

Pregunta 7

- a) En una sucursal bancaria hay 2 ejecutivos de cuenta. Los clientes llegan a tasa λ [clientes/minuto] y con probabilidad " p_1 " requerirán los servicios del primer ejecutivo (por consiguiente con probabilidad " p_2 " = $(1-p_1)$ requerirán los servicios del segundo). El banco no posee sala de espera por lo cual podrá haber una persona como máximo para cada ejecutivo (la persona que está en atención). Si el ejecutivo no se encuentra en su escritorio, el cliente no ingresa al sistema porque piensa que no está. Las tasas de atención del primer y segundo ejecutivo son μ_1 y μ_2 [clientes/minuto] respectivamente.
- Modele el problema con un diagrama de estados
 - Resuelva las ecuaciones de balance, dejando las probabilidades expresadas en función de los parámetros del enunciado.
 - ¿Cuál es el N° promedio de personas en el sistema? ¿Qué proporción de los clientes que llegan a la sucursal no logran entrar al sistema?
- b) Suponga ahora que se tiene la misma situación anterior, pero en esta ocasión el primer ejecutivo es un alumno en práctica. Este practicante, luego de terminar la atención de cada cliente, tiene una probabilidad " q " de ser llamado por su jefe, el que lo reta un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\gamma$ [minutos/cliente], luego de lo cual vuelve a su escritorio para seguir atendiendo.
- Modele el nuevo sistema con un diagrama de estados
 - Suponiendo conocidas las probabilidades estacionarias, ¿qué proporción del tiempo se encuentra el jefe retando al alumno en práctica?

Pregunta 8

En un pequeño banco hay 2 cajas, una para clientes y otra para no clientes. Ambos cajeros son igualmente eficientes y demoran un tiempo distribuido exponencialmente de media $1/\mu$. Los clientes llegan al banco según un tiempo exponencial de media $1/\lambda$, mientras que los no clientes lo hacen con media $1/(3\lambda)$. Además, si un cajero no tiene personas en su fila, puede llamar y atender a alguien de la otra fila.

- Modele el proceso con su diagrama de estados y plantee las ecuaciones de balance (el sistema admite colas infinitas).
- Suponiendo las probabilidades estacionarias conocidas, calcule la proporción de tiempo ocioso de los cajeros, el largo promedio de la fila de clientes y el tiempo promedio de espera de un cliente.