Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor Cátedra	:	Fernando Lema
Profesores Auxiliares	:	Constanza Paredes
	:	Eduardo Zamora

CONTROL 3

5 de Noviembre de 2007

1. *a*) Sean $X_1 \to N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $X_2 \to N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Determine C tal que $\mathbb{P}(X_1 > C) = \mathbb{P}(X_2 < C)$. Analice los casos: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ y $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \to 0$

   b) Sean $X_1 \to N(1,4)$ y $X_2 \to N(1,4)$ independientes. Calcule:
   - $\mathbb{P}(X_1^2 + X_1 > 2)$
   - $\mathbb{P}(|X_1 - 2X_2| > 1)$

   c) Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ v.a. independientes tales que $X_i \to N(\mu, 4)\ \forall\ i$. Determine n tal que: $\mathbb{P}(|\overline{X} - \mu| < 0{,}5) = 0{,}95.(\overline{X}$: media de los $X_i)$.

   d) Sea $X \to N(\mu, \sigma^2)$. Se dice que Y tiene distribución lognormal de parámetros μ, σ^2 ssi: $Y = e^X$. (Dicho de otra forma Y es lognormal ssi $Ln(Y)$ es normal). Determine la función densidad de Y y calcule su Esperanza.

2. *a*) Suponga que el ingreso de un grupo de familias (en miles de \$)es una v.a. con densidad $f_X(X) = \alpha C^\alpha X^{-\alpha-1}$ para $X > C$ (Esta distribución se conoce como distribución de Pareto). Suponga $\alpha = 3$ y $C = 400$. Si se toma una muestra de 48 familias independientes, calcule la probabilidad de que el ingreso promedio supere los 550 mil pesos.

   b) Sea X una v.a discreta con $R_X \subset \mathbb{N}$. Se define la función generadora de probabilidades como:

   $$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X = k)$$

   1) Determine $G_X^{(n)}(Z)|_{Z=0}$

   2) Calcule $G_X(z)$ si X$\to P(\lambda)$.

   c) A cierto país llegan turistas con a una tasa de 12000 por año. Cada turista que llega permanece en el país un tiempo exponencual de media 1,5 meses. Considere el proceso: X_t : Número de turistas en el país. Realice el diagrama de estados y determine en régimen permanente la distribución de probabilidades de este proceso.

3. La farmacia “Luz Verde” tiene un servicio de ventas y consultas telefónicas, el cual funciona con dos telefonistas. Cuando ambas telefonistas están ocupadas puede quedar una tercera llamada en espera. Los clientes que reciben tono ocupado desisten y llaman a otra farmacia. Las llamadas ocurren según un Proceso de Poisson de tasa 3 cada 5 minutos y la conversación con la telefonista tiene una duración exponencial de media 4 minutos.

   a) Para el proceso X_t: Número de clientes en el sistema, determine la distribución de probabilidades en régimen estacionario. Indique la proporción de tiempo ocioso de las telefonistas y el tiempo promedio que espera un cliente antes de ser atendido.

   b) Para mejorar la atención se propone la siguiente modificación:

      - La primera telefonista sólo atenderá “venta”, demorándose un tiempo exponencial de media 5 minutos.
      - La segunda telefonita sólo atenderá “consultas”, demorándose un tiempo exponencial de media 2 minutos.
      - No existen llamadas en espera.

      Las llamadas son ahora a tasas 1 cada 5 minutos para venta y 2 cada 5 minutos para consulta.
      Modele el sistema planteando el proceso, el diagrama de estados y 2 ecuaciones de balance.