Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor Cátedra	:	Fernando Lema
Profesores Auxiliares	:	Constanza Paredes
	:	Eduardo Zamora

TAREA 3

ENTREGA: 5 de Noviembre de 2007

1. Sea (X, Y) un vector aleatorio. Se define el coeficiente de correlación entre X Y , denotado por ρ_{XY}, como:

$$\rho_{XY} = \frac{E\{(X - E(X)) * (Y - E(Y))\}}{\sqrt{Var(X) * Var(Y)}} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X) * Var(Y)}}$$

   a) Muestre que si X ,Y son independientes entonces ρ_{XY}= 0.

   b) Muestre, por medio de un ejemplo, que si $\rho_{XY} = 0$ no implica que X, Y son independientes.

   c) Muestre que $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$.

   d) Muestre que Y = a + bX si y sólo si $\rho^2_{XY} = 1$.

2. Sean $X_1 \to N(\mu, \sigma^2)$, $X_2 \to N(\mu, \sigma^2)$, independientes.

   Considere Z(t) = $X_1 cos(wt) + X_2 sen(wt)$, $V(t) = \frac{\partial Z(t)}{\partial t}$

   a) Determine la distribución de Z(t) y V (t) (t fijo).

   b) Muestre que ρ_{ZV}= 0.

3. *a*) Considere una v.a. X con distribución Beta de parámetros α, β. Calcule $\mathbb{E}(X)$ y $Var(X)$.

   b) Sean $Y_1 \to G(\alpha_1, \beta)$, $Y_2 \to G(\alpha_2, \beta)$, v.a. independientes. Muestre que $U = \frac{Y_1}{Y_1+Y_2} \to Be(\alpha_1, \alpha_2)$ y que U es independiente de V=$Y_1 + Y_2$

   c) Suponga que la proporción X de artículos defectuosos, en un gran lote, es desconocida y que $X \to Be(\alpha, \beta)$. Si se selecciona al azar un artículo del lote, ¿Cúal es la probabilidad de que sea defectuoso?

4. Sea X una v.a discreta con $R_X \subset \mathbb{N}$. Se define la función generadora de probabilidades como:

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X = k)$$

   a) Determine $G_X^{(n)}(Z)|_{Z=0}$

   b) Calcule $G_X(z)$ si X$\rightarrow P(\lambda)$.

5. Sean $X_i \rightarrow U(0,1)$, i = 1, ..., n, independientes. Determine usando la función generadora de momentos la distribución de la v.a.: Y = $-2 * \ln(\prod_{i=1}^{n} X_i)$. ¿Cuál es la distribución para n grande? Calcule $\mathbb{P}(y > 60)$ si n = 50.

6. *a)* Sea X una v.a. tal que E(x^k) = (k + 1)!2^k, k = 1, 2.... Determine, usando la F.G.M. la distribución de X.

   b) Las funciones generadoras de momentos de las variables X e Y son respectivamente $M_x(t) = exp(2e^t - 2)$ y $M_y(t) = (\frac{1}{4})^{10}(3e^t + 1)^{10}$. Se sabe además que X e Y son independientes. Calcule $\mathbb{P}(X + Y = 2)$

7. Un embarque de televisores consta de 40 lotes de 1000 TV cada uno. De cada lote, se examina una muestra de 80 televisores (en forma independiente), contándose el numero de defectuosos. Si el fabricante asegura que la probabilidad que un televisor sea defectuoso es 0,01; calcule la probabilidad que se encuentran más de 40 televisores defectuosos en los 40 lotes.

8. Suponga que X es una v.a. con la siguiente fdp:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-\alpha)} & si\, x \geq \alpha \\ 0 & si\, x < \alpha \end{cases}$$

   Nota: Esta f.d.p. se llama exponencial desplazada.

   a) Encuentre la f.g.m. de X y úsela para encontrar $\mathbb{E}(X)$.

   b) Suponga que la duración de una ampolleta es sigue una distribución igual a la definida previamente. Cuando una ampolleta falla es reemplazada por una nueva cuya f.d.p. es la misma a la anterior. Encuentre el número necesario de ampolletas para asegurar el funcionamiento del sistema por más de 200 horas con probabilidad 0,95, para el caso $\lambda = \frac{1}{2}$ y $\alpha = 2$

9. a) Dos grandes poblaciones de hombres y mujeres tienen estaturas (H,M) que son v.a. tales que $H \to N(1{,}7; 0{,}1^2)$ y $M \to N(1{,}6; 0{,}05^2)$. Si se escoge un individuo al azar y resulta tener estatura inferior a 1.65, calcule la probabilidad de que sea mujer. ¿Cómo cambia su respuesta si se sabe que la estatura del individuo es igual a 1.65?

   b) El ingreso mensual de las personas (X) puede modelarse como una v.a. producto de muchas variables independientes entre sí, (como sexo, edad, eduación, etc.) es decir X=$X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 ... \cdot X_n$, con $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ y $Var(X_i) = \sigma_i^2$. Si n es un número grande, determine la densidad de X.

10. La edad en una gran población de adultos es una v.a. normal de media 45 años y desviación estándar 9 años.

    a) Si de la población se extraen n individuos onteniéndose por lo menos a uno menor a 50 años. calcule la probabilidad de obtener al menos uno mayor a 50 años.

    b) Si se toman dos adultos, ¿Cúal es la probabilidad de que sus edades difieran en menos de 3 años.

11. Una máquina trabaja un tiempo (antes de fallar) que puede ser modelado como una v.a. e(λ). Cuando falla, la reparación toma un tiempo aleatorio, que se distribuye e(μ). Si la máquina esta buena en t=0, calcule la probabilidad que lo este en el instante t. Indicación: Considere el proceso:

$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{maquina buena en t} \\ 1 & \text{maquina mala en t} \end{cases}$$

    Plantee y resuelva las ecuaciones diferenciales.

12. A una gasolinera que cuenta con sólo una bomba de bencina, llegan vehículos según un proceso de Poisson de tasa 12 autos por hora.

    a) Si entre las 12:00 y 13:00 pm. llegaron 12 vehículos, calcule la probabilidad de que entre las 12:50 y 13:00 hayan llegado al menos dos vehículos.
    b) Suponga ahora que el tiempo que se necesita para atender un vehículo es exponencial de media 8 minutos. Si la bomba se esta usando, los clientes pueden desistir (no ingresan y se van); en particular si hay n autos en la gasolinera, la probabilidad de que un cliente potencial que llega desista es q_n.

        1) Plantee el diagrama de estados y ecuaciones de balance para el proceso "Numero de vehículos en la gasolinera"

2) Suponiendo

$$q_n = \begin{cases} \frac{n}{3} & n = 0, 1, 2, 3 \\ 1 & n > 3 \end{cases}$$

Resuelva las ecuaciones de balance. Calcule el tiempo promedio que un vehículo permanece en la gasolinera y la proporción de vehículos que llegan pero no ingresan.

13. La sala de emergencia de un consultorio atiende con dos equipos médicos y no admite cola (los pacientes que no logran ingresar a esta sala deben ir a otro consultorio). A la sala llegan dos tipos de pacientes: los paciente tipo A, a una tasa de 4 por hora y los tipo B, a una tasa de 2 por hora. Cada paciente tipo A que llega recibe atención de algún equipo médico desocupado, demorándose un tiempo exponencial de media 20 minutos. Cada paciente tipo B que entra requiere la atención simultánea de los dos equipos, demorándose un tiempo exponencial de media 45 minutos.

   a) Plantee el proceso a estudiar , indicando los estados, el diagrama y las ecuaciones de balance.

   b) Suponiendo que tiene resueltas las ecuaciones de balance, indique como calculara la proporción de pacientes que no ingresa a la sala, y el tiempo promedio que cada equipo médico esta ocioso (considere un turno de 24 horas). Como cambia su modelo (diagrama de estados) si uno de los equipos médicos es mas lento demorándose en promedio 30 minutos (cuando atiende solo), manteniéndose el resto de las condiciones?

14. A una oficina del Registro Civil e Identificación llega gente a sacar su cédula de identidad según un proceso de Poisson de tasa 10 por hora.

   a) Existen dos funcionarios que atienden cada uno según una exponencial de media 8 minutos. Por simplicidad de cálculo suponga que una persona ingresa al sistema sólo si en él hay menos de 5 personas. Calcule en régimen permanente:

      1) La proporción de personas que no ingresa.

      2) El tiempo promedio que demora una persona en el sistema.

   b) Las autoridades desean cambiar el procedimiento de atención separándolo en dos etapas. La etapa A (pago y llenado de antecedentes) con un funcionario atendiendo según una exponencial de media 4 minutos y la etapa B (foto, firma, huellas) atendida por un funcionario según una exponencial de media 4 minutos. Cada cliente debe pasar secuencialmente por ambas etapas (A-B) y en las dos puede existir cola sin restricción de capacidad. Modele este sistema planteando el proceso de estudio y el diagrama de estados.

15. Los alumnos llegan a un negocio de fotocopias según un proceso de Poisson de tasa 3 por minuto.

    a) 1) Si en un intervalo de 4 minutos llegaron 9 alumnos, calcule la probabilidad de que sólo uno de ellos haya llegado en el último minuto.
    2) Calcule la probabilidad de que el tiempo entre dos alumnos supere los tres minutos.

    b) El negocio funciona con tres fotocopiadoras y la atención de un alumno es exponencial de media 2 minutos. Cuando un alumno llega y observa a cuatro compaeros se va a otro negocio.
    1) Si X_t : N de alumnos en el negocio; plantee el diagrama de estados y ecuaciones de balance.
    2) Si $P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0, P_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} P_0, P_3 = \frac{\lambda^3}{6\mu^3} P_0, P_4 = \frac{\lambda^4}{24\mu^4} P_0$, es solución de las ecuaciones, calcule numéricamente el tiempo promedio que demora un alumno en el negocio y la proporción de tiempo ocioso que tienen las máquinas.

    c) De las tres fotocopiadoras, dos son corrientes y una especial. Cada fotocopiadora corriente funciona un tiempo exponencial de media 1 hora y su reparación demora una media de 15 minutos atendida por una persona. La fotocopiadora especial funciona un tiempo exponencial de media 2 horas y su reparación demora 25 minutos atendida por dos personas. Existen dos personas para reparar las máquinas. Modele el sistema de reparación de fotocopiadoras planteando el proceso en estudio y diagrama de estados.