Probabilidades y Procesos Estocásticos
Tarea 2

Profesor	: Fernando Lema
Auxiliares	: Constanza Paredes
	Eduardo Zamora
Entrega	: 01/10/07 control 2

P1. Sean X, Y v.a. discretas, independientes.

a) Si X→Geom (p) e Y→Geom (p), calcule *IP*(X=m | X+Y=n).
Indicación: Calcule *IP*(X+Y=j) para un j genérico.

b) Si X→Bin (n,p) e Y→Bin (m,p), calcule *IP*(X=j | X+Y=k).
Indicación: $\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$.

P2. Las primeras 5 repeticiones de un experimento cuestan 10[UM] c/u. Las siguientes cuestan 5[UM] c/u. El experimento debe repetirse hasta que se obtenga el primer éxito. Si la probabilidad de éxito es 0.9 y si las repeticiones son independientes, determine el costo promedio total de la operación.

P3. Se dice que una v.a. X tiene distribución de Pareto de parámetros X_0, α (ambos mayores que cero) si su función densidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha X_0^{\alpha} / x^{\alpha+1} & x \geq X_0 \\ 0 & x < X_0 \end{cases}$$

a) Calcule *IE*(X) y Var(X).
b) Si Y= ln(X/X_0), determine la densidad de Y.
c) Considere que X representa el ingreso mensual (en miles de $) de un grupo de individuos con X_0 =200 y α =2. Suponga que de un gran número de individuos se escogen 5 al azar en forma independiente. Calcule la probabilidad que al menos 4 de ellos tengan ingresos superiores a $300.000.
d) Si a todas las personas que ganan menos de $400.000 se les da un reajuste del 10%, mientras que a aquellos que ganan más de $400.000 se les da $40.000 de reajuste, determine la distribución de probabilidad de la v.a. "monto de reajuste".

P4. Suponga que la duración de un equipo X en horas es un v.a. Exp(λ), es decir:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Para efectuar el control de calidad se cuenta con un operario cuya misión es medir la duración de los equipos. Los equipos se ponen a funcionar en t=0, pero el operario (por flojera) solo se pone a inspeccionar en t=t_1, de tal forma que a todo equipo fallado anteriormente se le asigna t_1 horas. También por flojera, el operario se va temprano (antes que termine el proceso) y a todo equipo que en t_2 (hora en que se va) esté bueno, se le asigna t_2 horas.

a) Determine la distribución de la v.a. Y "duración definida por el operario". Calcule *IE*(Y).
b) Considere ahora que el operario se pone honesto y decide eliminar de su proceso a todo equipo que no haya sido inspeccionado realmente. Determine la la distribución de la v.a. Z "nueva duración definida por el operario".
c) (Las v.a.'s Y, Z ahora son distintas de las anteriores. X es la misma). Si Y$\rightarrow$Exp(α) independiente de X, calcule IP($Y \geq kX$) $\forall k \in IN$.
d) Determine la densidad de Z=X+Y.

P5. En las siguientes 2 partes se pretende obtener una forma diferente para el cálculo de esperanzas.

a) Sea X v.a. discreta de recorrido $R \subseteq \{0,1,2\ldots\}$. Pruebe que:

$$IE(X) = \sum_{k=0}^{\infty} IP(X > k).$$

b) Sea X v.a. continua con densidad $f_X(x) = 0$ si x<0. Pruebe que:

$$IE(X) = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x))dx$$

c) Sean X, Y v.a.'s absolutamente continuas e independientes. Pruebe que:

$$IP(X<Y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(y) f_Y(y) dy$$

P6. De un mazo de naipes se sacan 2 cartas sin reposición, definiendo el vector (X,Y) como X: nº de monos obtenidos, Y: nº de ases obtenidos.

a) Determine la distribución de probabilidades de (X,Y).
b) Determine las distribuciones marginales de X e Y. Calcule *IE*(X) y *IE*(Y).
c) Determine la distribución condicional de X dado Y=*y*, y la distribución condicional de Y dado X=*x*.
d) Determine la distribución de probabilidades de las variables M_1=max(X,Y) y de M_2=min(X,Y).

P7. Un plano está dividido en rectas paralelas separadas una distancia L_1 una de otra. Se dispone de una aguja (barra) de largo L_2 que es lanzada al azar sobre el plano. Calcule la probabilidad que la aguja corte alguna de las rectas. Evalúe en L_1=L y L_2=L/2.

P8. Suponga que un comerciante de autos usados paga una cantidad X (en miles de pesos) por un vehículo y lo vende por una cantidad Y (también en miles de pesos). Las variables X e Y tienen una densidad conjunta:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} x/36 & 0 < x < y < 6 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

a) Determine la función densidad de la variable G "ganancia por coche".

b) Considere ahora solo la variable Y (precio de venta) con densidad:

$$f_Y(y) = \begin{cases} y^2/72 & 0 < y < 6 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Debido a las condiciones de mercado, el comerciante decide hacer un regalo a sus compradores. El ofrece por todo vehículo cuyo precio de venta está entre 0 y 2000 un 1% en vales de bencina. Si el precio está entre 2000 y 4000 regala un par de parlantes cuyo valor es 40. Para el resto regala una radio de valor 100. Dé la distribución de probabilidades la v.a. R "monto regalado". Calcule *IE*(R).

P9. La fuerza magnética H en un punto P ubicado a X unidades de un cable de corriente I queda dada por:

$$H = \frac{2I}{X}$$

a) Si X→U(2,4) e I→U(10,20), determine la densidad de H suponiendo que X e I son independientes.
b) Calcule *IP*(H>10 | X<3).

P10. Suponga que el vector aleatorio (X,Y) está uniformemente distribuido en la región $x^2 + y^2 \leq 1$, $y > 0$.

a) Calcule *IE*(Y|X) y *IE*(X|Y).
b) Determine la densidad de R = $\sqrt{X^2 + Y^2}$.

P11. Una fuente luminosa de intensidad I produce una luminosidad $L = I/R^2$ en un punto ubicado a distancia R. Suponga que I y R son v.a.'s independientes con I→U(1,2) y R→Exp(1).

a) Calcule *IP*(L>1 | I>1.5).
b) Usando T.C.V. determine la densidad de L.
c) Calcule la iluminación promedio de los puntos ubicados a 2 unidades de distancia.

P12. La duración de una máquina es una v.a. T→Exp(α) en horas. La máquina tiene costos de funcionamiento C_1 [UM] por hora y produce, mientras funciona, un ingreso de C_2 [UM] por hora. Para operar, la máquina requiere un especialista que cobra C_3 [UM] por hora y exige ser contratado por un nº prefijado de horas H. El pago del especialista es independiente de si la máquina está funcionando o no.

a) Sea U la v.a. que denota la utilidad obtenida por el uso de la máquina. Plantee U en función de los datos entregados.
b) Determine H de forma de maximizar la utilidad esperada.
c) Suponga α =0.01, C_1=6, C_2=20, C_3=4 y H=60 (no es el de la parte b)). Determine la distribución de probabilidad de la v.a. U.

P13. En un banco se ha determinado que los clientes piden préstamos por una cantidad aleatoria X de [UM] con una distribución *IP*(X=k) = $(1/2)^k$ con k=1,2,3….Por otro lado, se ha realizado un estudio que indica que una persona pagará una proporción Y de lo que solicitó (X = k), con densidad $f_Y(y) = (k+1)y^k$, donde $0<y<1$. Un cliente es clasificado como seguro si paga más de 4/5 de lo solicitado.

a) Calcule la probabilidad de que un cliente que pidió k [UM] sea seguro.
b) Si un cliente es seguro, calcule la probabilidad que haya pedido 2 [UM].

P14. Sean X e Y v.a.'s independientes con densidades:

$$f_X(x) = \begin{cases} (\pi\sqrt{1-x^2})^{-1} & |x| \leq 1 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-y^2/2} & y \geq 0 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

a) Calcule *IE*(X), *IE*(Y), Var(X), Var(Y).
b) Encuentre la densidad de Z=XY.